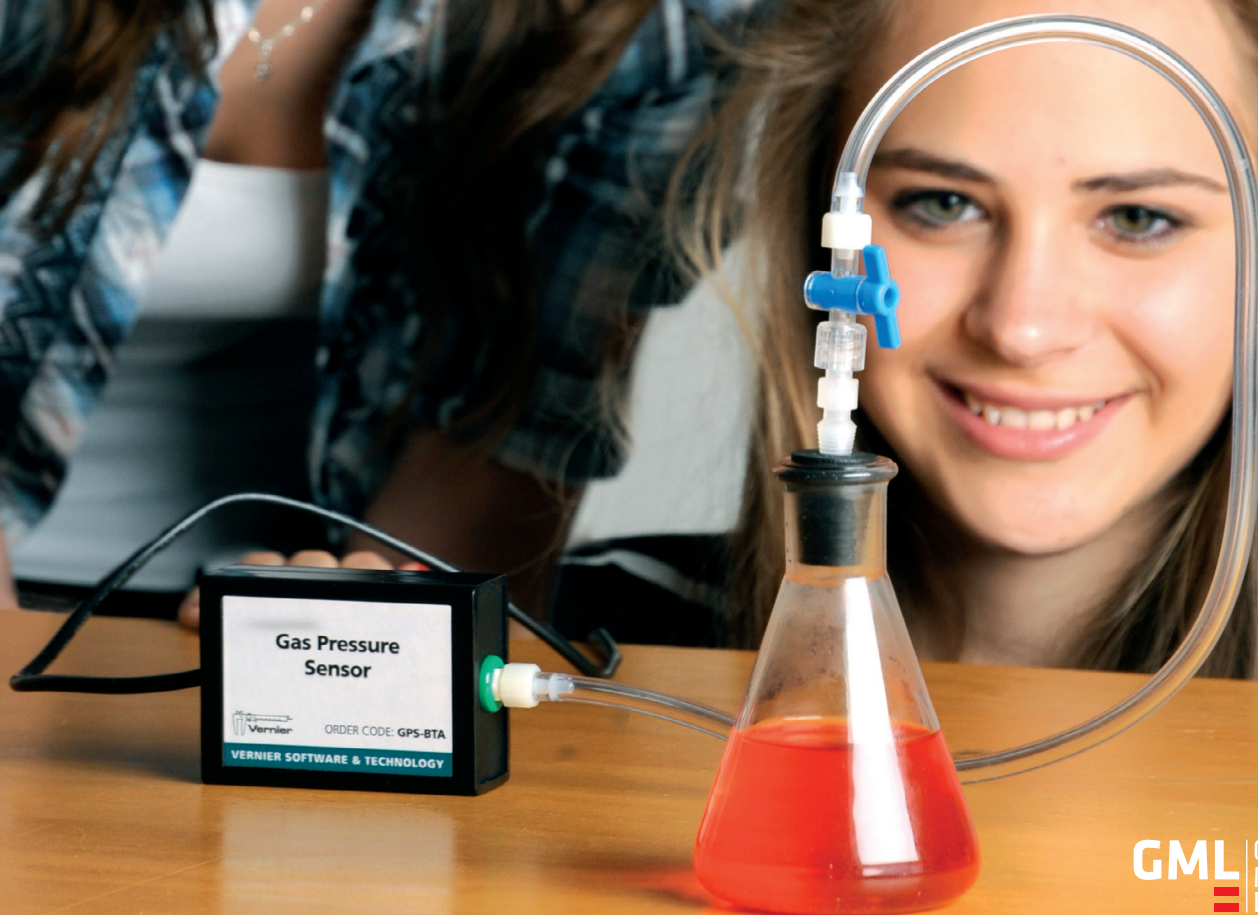
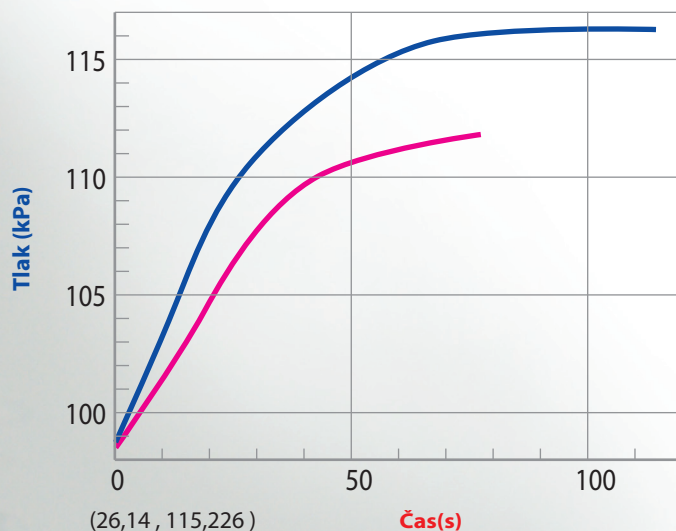




„Radost vidět a rozumět, to je nejkrásnější dar přírody.“
Albert Einstein

Knížka, kterou právě držíte v rukou, si klade za cíl ulehčit učitelům práci a pomoci jim modernizovat a zatraktivnit výuku. Obsahuje návody na experimentování s měřicím systémem Vernier, jež lze využít jak k demonstračním aktivitám v hodině, tak jako přípravu na laboratorní práce. Její autoři – učitelé přírodovědných předmětů na Gymnáziu Matyáše Lercha Brno a externí spolupracovníci – sestavili pestrou škálu zajímavých návodů, jak používáním moderních technologií ozvláštnit výklad a učinit jej pro žáky přitažlivějším.

Jestli se jim podařilo cíl naplnit, můžete posoudit sami.

Příjemné čtení a hodně experimentální radosti!

Mirek Kubera a Vojtěch Beneš
za kolektiv autorů

Poděkování

Chtěli bychom poděkovat vedení Gymnázia Matyáše Lercha, neboť nás v naší snaze rozvíjet výuku přírodovědných předmětů neustále podporuje a povzbuzuje.

Děkujeme také všem spolupracovníkům a rodinným příslušníkům, bez nichž by tato brožura vůbec nevznikla.

Tato publikace vznikla díky operačnímu programu **Vzdělávání pro konkurenceschopnost** v projektu **Mobilní laboratoř přírodovědných předmětů**, který byl v letech 2011–2012 realizován na Gymnáziu Matyáše Lercha v Brně.

Obsah

tercie

1	Pozor na tlak!	7
2	Pod tlakem!	13
3	Vypuštěno!	19
4	Táhni!	23
5	Do hloubky!	27

kvarta

6	Jedeme vzhůru!	31
7	Projdeme se?	39
8	Pojďme se setkat!	45

sexta

9	Kyselá chemie!	51
10	Tik tak	55
11	Odtud potud!	61
12	Jak předměty chladnou?	67

septima

13	Jen se tak trochu zhoupnout!	71
-----------	------------------------------	----

oktáva

14	Jak jsou vysocí?	75
-----------	------------------	----

Funkce – lineární funkce

Pozor na tlak!

Mirek Kubera

- Výstup RVP:** žák načrtne grafy požadovaných funkcí, formuluje a zdůvodňuje vlastnosti studovaných funkcí, modeluje závislosti reálných dějů pomocí známých funkcí
- Klíčová slova:** přímá úměrnost, lineární funkce, graf funkce, směrnice přímky, sklon přímky

Laboratorní práce

Doba na přípravu:

10 min

Doba na provedení:

45 min

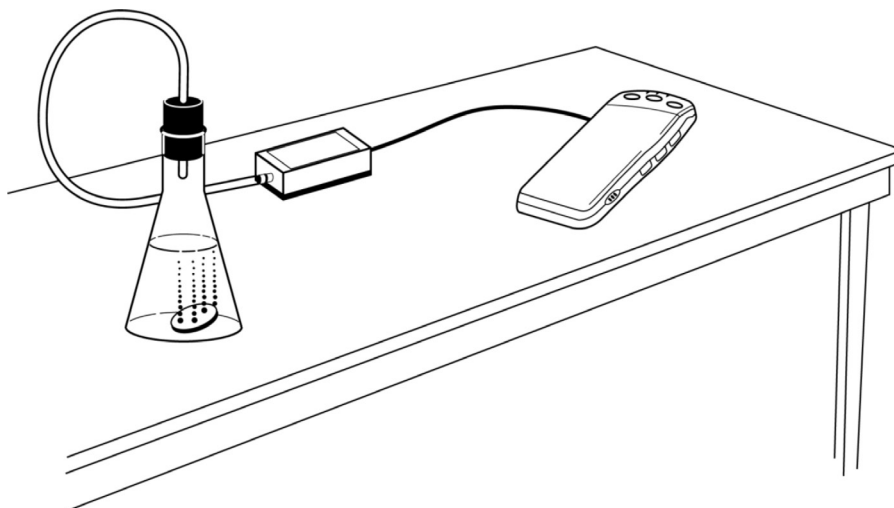
Obtížnost:

nízká

- Úkol**
- 1) Změřte při probíhající chemické reakci změny tlaku v závislosti na čase.
 - 2) Modelujte průběh tlaku pomocí lineární funkce.
 - 3) Využijte směrnici přímky k vysvětlení účinku teploty na rychlost chemické reakce.

Pomůcky Počítač s programem Logger Pro, LabQuest, čidlo tlaku, 2 láhve od vína 720 ml, gumová zátka s jedním otvorem, hadička, voda o pokojové teplotě, vlažná voda, šumivé tablety proti překyselení žaludku nebo šumivý celaskon, ochranné brýle

Teoretický úvod Když spolu reagují dvě chemické látky, jiné, jako například plyny, mohou vznikat. Rychlost probíhající reakce může být ovlivněna různými faktory, kupříkladu teplotou. V této aktivitě si ukážeme, jak teplota ovlivňuje rychlost reakce probíhající při rozpouštění šumivé tablety ve vodě při současném uvolňování plynu. Rychlost probíhající reakce je měřena rychlostí tvorby plynu. Budeme měřit rychlost probíhající reakce pomocí snímání měnícího se tlaku v uzavřené nádobě. Potom použijeme matematický model pro vyjádření, jak teplota vody ovlivňuje rychlost chemické reakce.



Vypracování Před započatím pokusu si nasadte ochranné brýle. Propojte počítač s LabQuestem a LabQuest s čidlem tlaku. Na volném konci hadičky musí být nasazena gumová zátka. Spusťte program Logger Pro a nastavte měření: doba měření 20 s, vzorkovací frekvence 50 Hz.

Do první láhve nalijte 200 ml vody pokojové teploty. Vhodte do láhve šumivou tabletu a co nejrychleji láhev uzavřete zátkou napojenou na tlakové čidlo. Okamžitě spusťte sběr dat. Měření bude probíhat po dobu 20 s. Držte láhev ve svislé poloze.

Po ukončení měření odkloňte láhev stranou od ostatních osob a láhev odzátkujte.

Nyní prozkoumejte získaný graf. Pokud nebylo vaše měření ovlivněno nepřesnostmi, měli byste získat rovnoměrně rostoucí hodnoty na přímce znázorňující velikost tlaku v láhvi v závislosti na čase. Se svým učitelem se poradte, zda je nutné měření opakovat. Pokud ne, uložte naměřené hodnoty **Experiment** → **Uchovat poslední měření**.

Pozor na tlak!

Nyní si připravte a zopakujte experiment s vlažnou vodou (druhá láhev, teplota např. 40 °C). V případě úspěšného měření opět data uložte.

1. Klikněte kamkoliv do oblasti grafu a učiňte jej aktivním. Pokud je to nutné, změňte měřítko času a tlaku tak, abyste dobře zobrazili lineární závislost.
2. Stiskněte tlačítko **Odečtet hodnot**, abyste mohli z grafu přečíst naměřené hodnoty.
3. Pomocí myši umístěte kurzor na začátek grafu. Zapište hodnotu průsečíku s osou y do tabulky. Zaokrouhľujte všechny hodnoty na 3 platné číslice. Jaký je fyzikální význam této hodnoty? Proč jsou průsečíky obou grafů s osou y přibližně stejné?
4. Umístěte kurzor poblíž levého okraje grafu a zapište do tabulky souřadnice (x_1, y_1) a (x_2, y_2) dvou různých, od sebe vzdálených bodů ležících na dané přímce. Zapište stejným způsobem souřadnice dvou různých bodů ležících na přímce odpovídající vlažné vodě.
5. Jestliže známe souřadnice dvou bodů ležících na jedné přímce, můžeme vypočítat

$$\text{směrnici } m \text{ této přímky dle následujícího tvaru: } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Použijte tento vztah pro zjištění směrnice každé z přímek. Výsledky zapište do tabulky.

	x_1	y_1	x_2	y_2	y průsečík	směrnice m
voda pokojové teploty						
vlažná voda						

6. Jaký je fyzikální význam směrnice (sklonu) přímky grafu závislosti tlaku na čase?
7. Obecný tvar rovnice lineární funkce je $y = mx + b$ kde m je směrnice této přímky a b je průsečík s osou y . Na základě předchozích informací určete rovnici této přímky – lineární funkce znázorňující změny tlaku v závislosti na čase:

rovnice pro vodu pokojové teploty _____

rovnice pro vlažnou vodu _____

Nyní za pomoci programu Logger Pro zakreslete tuto přímku do grafu naměřených hodnot.

- a) Vyberte **Analýza** → **Proložit křivku**. Vyberte jednu z naměřených sad, aproximace manuální.
- b) Z nabídky funkcí vyberte rovnici $mx+b$.
- c) Vložte hodnotu směrnice m a průsečíku s osou y , tedy b .
- d) Potvrďte svou volbu OK.

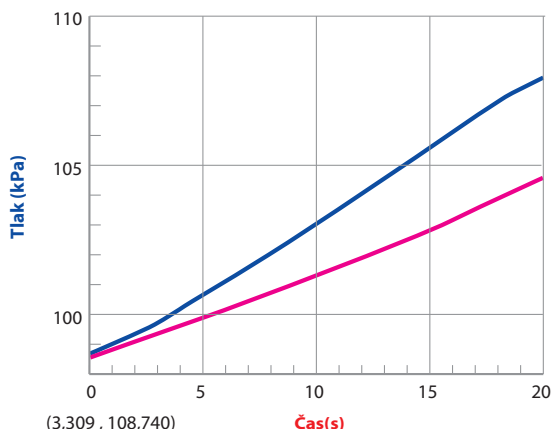
8. Jak dobře odpovídá vykreslená přímka naměřeným datům?
9. Odhadněte, jak by vypadal graf závislosti tlaku na čase po několika desítkách sekund či dvou minutách, jestliže by gumová zátka byla ponechána v láhvi. Rostl by tlak stále stejným způsobem? Vysvětlete, proč ano, nebo proč ne.
10. Odhadněte, jak by vypadal graf závislosti tlaku na čase v případě, že by se zátka samovolně uvolnila uprostřed probíhajícího měření.
11. Pro danou teplotu vody odhadněte, jak by vypadal graf tlaku v závislosti na čase, jestliže bychom použili pouze polovinu tablety. A kdybychom použili dvě tablety?
12. Který z grafů znázorňuje rychleji probíhající reakci? Proč to můžete tvrdit?

Pozor na tlak!

Mirek Kubera

- Zpracování** 1. Klikněte kamkoliv do oblasti grafu a učiňte jej aktivním. Pokud je to nutné, změňte měřítko času a tlaku tak, abyste zobrazili pouze lineární závislost (postačí, když přepíšete největší hodnotu na dané ose).

**Ukázka
naměřených
hodnot**



2. Stiskněte tlačítko **Odečet hodnot**, abyste mohli z grafu přečíst naměřené hodnoty.
3. Pomocí myši umístěte kurzor na začátek grafu. Zapište hodnotu průsečíku s osou y do tabulky. Zaokrouhľujte všechny hodnoty na 3 platné číslice. Jaký je fyzikální význam této hodnoty? Proč jsou průsečíky obou grafů s osou y přibližně stejné?

Odpověď:

Tato hodnota odpovídá tlaku na začátku experimentu, tedy atmosférickému tlaku.

4. Umístěte kurzor poblíž levého okraje grafu a zapište do tabulky souřadnice (x_1, y_1) a (x_2, y_2) dvou různých, od sebe vzdálených bodů ležících na dané přímce. Zapište stejným způsobem souřadnice dvou různých bodů ležících na přímce odpovídající vlažné vodě.
5. Jestliže známe souřadnice dvou bodů ležících na jedné přímce, můžeme vypočítat

sklon této přímky dle následujícího tvaru: $sklon = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Použijte tento vztah pro zjištění směrnice každé z přímek. Výsledky zapište do tabulky.

	x_1	y_1	x_2	y_2	y průsečík	směrnice m
voda pokojové teploty	4,0	99,59	16,0	103,13	98,53	0,295
vlažná voda	4,0	100,14	16,0	106,07	98,64	0,494

6. Jaký je fyzikální význam směrnice (sklonu) grafu tlaku v závislosti na čase?

Odpověď:

Vzhledem k tomu, že jednotkou sklonu je kPa/s, znamená tato veličina rychlost nárůstu tlaku (změna tlaku v čase).

7. Obecný tvar rovnice lineární funkce je $y = mx + b$, kde m je směrnice této přímky a b je průsečík s osou y . Na základě předchozích informací napište rovnici dané přímky – lineární funkce znázorňující změny tlaku v závislosti na čase:

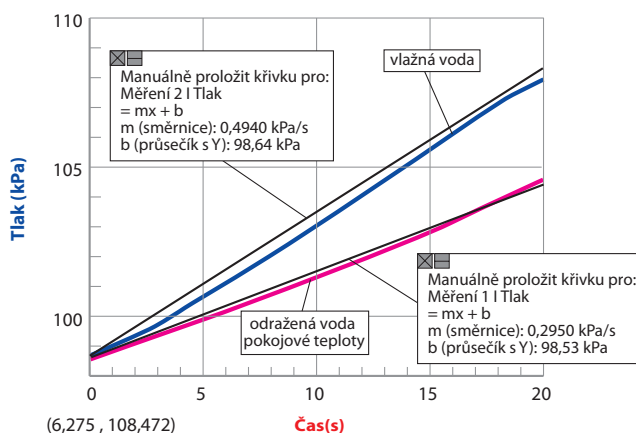
úloha 1

Pozor na tlak!

rovnice pro vodu pokojové teploty $y = 0,295x + 98,53$

rovnice pro vlažnou vodu $y = 0,494x + 98,64$

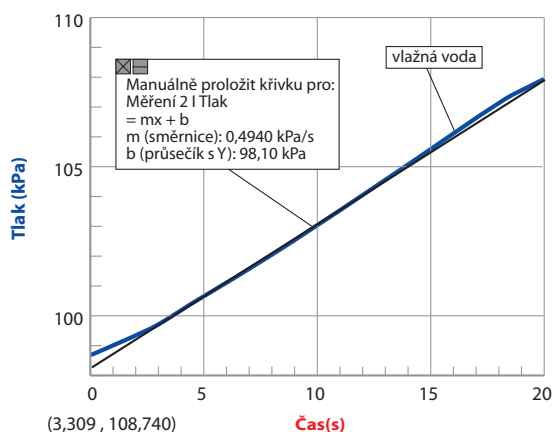
**Ukázka
naměřených
hodnot
a proložených
přímek**



8. Jak dobře odpovídá vykreslená přímka naměřeným datům?

Odpověď:

Vidíme, že červená přímka vcelku odpovídá naměřeným datům. Modrá křivka je však v prvních třech sekundách mírně nelineární a výsledná proložená přímka naměřeným datům příliš neodpovídá. Zde by bylo vhodné připomenout význam (hodnota atmosférického tlaku) průsečíku s osou y a posunout celou proloženou přímku mírně dolů.

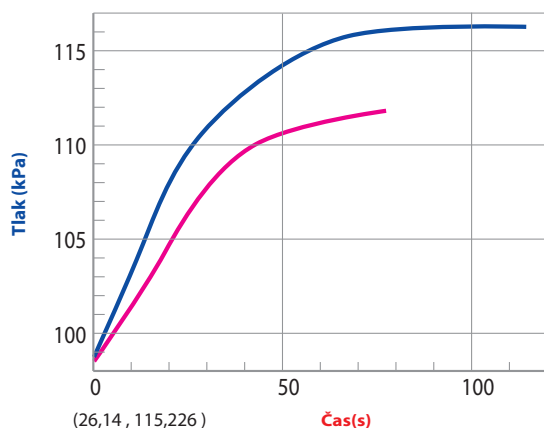


9. Odhadněte, jak by vypadal graf závislosti tlaku na čase po několika desítkách sekund či dvou minutách, jestliže by gumová zátka byla ponechána v láhvi. Rostl by tlak stále stejným způsobem? Vysvětlete proč ano, nebo proč ne.

Odpověď:

V případě, že budeme měřit tlak déle než 20 s (do tohoto času se vyvíjí tolik plynu, že nárůst tlaku je stále lineární), získáme závislost, která se v určitém čase zastaví stejně jako probíhající chemická reakce v láhvi. Tlak tedy nebude trvale narůstat lineárně.

**Ukázka
naměřených
hodnot
(doba
měření
120 s)**



10. Odhadněte, jak by vypadal graf závislosti tlaku na čase v případě, že by se zátka samovolně uvolnila uprostřed probíhajícího měření.

Odpověď:

Pokud by se zátka uvolnila, tlak by se vrátil na hodnotu atmosférického tlaku, která se pohybuje kolem hodnoty 98 kPa.

11. Pro danou teplotu vody odhadněte, jak by vypadal graf tlaku v závislosti na čase, jestliže bychom použili pouze polovinu tablety. A kdybychom použili dvě tablety?

Odpověď:

Při použití poloviny tablety by se uvolnilo poloviční množství plynu a nárůst tlaku by byl pozvolnější. Lze očekávat, že přímkou by byla méně strmá a koeficient m přibližně poloviční. Při použití dvou tablet by tomu bylo naopak. Větší množství uvolněného plynu, větší tlak, strmější přímkou, větší hodnota koeficientu m .

12. Který z grafů znázorňuje rychleji probíhající reakci? Proč to můžete tvrdit?

Odpověď:

Rychleji probíhající reakci znázorňuje modrý graf (vyšší teplota vody), protože je charakterizován větším sklonem, větší hodnotou koeficientu m , který vyjadřuje rychlost nárůstu tlaku plynu, tedy i rychlost probíhající reakce.

Pod tlakem!

Mirek Kubera

Výstup RVP: žák načrtne grafy požadovaných funkcí, formuluje a zdůvodňuje vlastnosti studovaných funkcí, modeluje závislosti reálných dějů pomocí známých funkcí

Klíčová slova: nepřímá úměrnost, graf funkce, hyperbola

Laboratorní práce

Doba na přípravu:

10 min

Doba na provedení:

45 min

Obtížnost:

nízká

Úkol Změřte závislost tlaku na objemu vzduchu uzavřeného v injekční stříkačce. Porovnejte objevenou závislost s grafem funkce nepřímé úměrnosti. Provedte substituci proměnné a převedte naměřená data na přímou úměrnost.

Pomůcky Počítač s programem Logger Pro, LabQuest, čidlo tlaku s dodávanou injekční stříkačkou

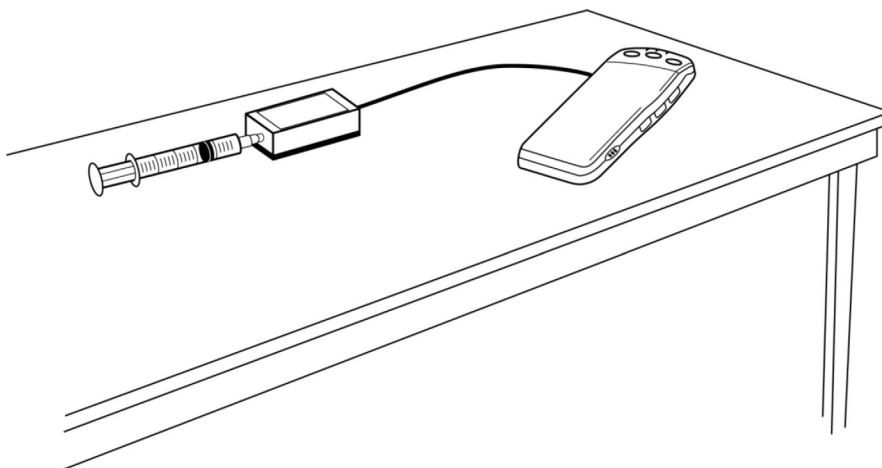
Teoretický úvod Vezměme vzduch uzavřený v nádobě mající pokojovou teplotu. Jestliže změníme objem nádoby, co se bude dít s tlakem vzduchu uvnitř? Můžete si to lépe představit, jestliže vezmete malý balónek a budete ho mačkat prsty. Když bude mít menší objem, budete muset mačkat silněji. To znamená, že když se zmenšuje objem, tlak uvnitř narůstá. Dvě veličiny, které jsou spolu svázány, se mění v závislosti jedna na druhé **nepřímo úměrně**.

Dále můžeme pozorovat, že součin dvou nepřímo úměrných veličin zůstává konstantní.

Předpokládejme, že veličiny x a y jsou nepřímo úměrné. Potom platí $x \cdot y = k$ nebo $y = \frac{k}{x}$,

kde k je v obou vztazích konstantní hodnota. V našem případě je x rovno objemu vzduchu uzavřeného ve stříkačce (ml), y je hodnota tlaku (kPa) a k je konstanta odpovídající součinu tlaku a objemu (kPa·ml).

Možná už tušíte, že některé další veličiny se mění přesně tímto způsobem. Pro vzduch a další plyny se tento vztah nazývá Boyle-Mariottův zákon.



- Vypracování**
1. Připravte injekční stříkačku a tlakový senzor k měření. Píst stříkačky umístěte prvním černým kroužkem na značku 10 ml a poté spojte stříkačku s tlakovým čidlem.
 2. Spusťte program Logger Pro a připravte měření. V nastavení **Sběru dat** vyberte mód **Události se vstupy**. Nově zadávanou veličinou je objem v ml.
 3. Nastavte správně zobrazení měřených veličin. Na vodorovnou osu vyberte **Objem (ml)** a na svislou **Tlak (kPa)**.
 4. Nyní máte vše připraveno k měření. Spusťte **Sběr dat**. Jako první změříme hodnotu tlaku pro objem nastavený na 10 ml. Protože však tlakové čidlo má také svůj vnitřní objem, nebudeme zapisovat hodnotu nastavenou na stříkačce, ale hodnotu o 0,8 ml větší, což odpovídá objemu vzduchu uzavřenému v čidle. Stiskneme **Zachovat** a zapíšeme objem vzduchu 10,8 ml.

úloha 2

Pod tlakem!

- Posuneme píst stříkačky na hodnotu 9 ml, stiskneme **Zachovat** a zapíšeme objem vzduchu 9,8 ml.
- Takto pokračujeme pro objemy 8, 7, 6 a 5 ml, dále pak zvětšujeme objem vzduchu mezi 11 a 20 ml. Vždy zapíšeme objem o 0,8 ml větší.
- Měření ukončíme stiskem tlačítka **Stop**. Naměřené hodnoty jsou zobrazeny v grafu a uloženy v tabulce.

objem V (ml)	tlak p (kPa)	součin p·V (ml·kPa)
10,8		
9,8		
8,8		
7,8		
6,8		
5,8		
11,8		
12,8		
13,8		
14,8		
15,8		
16,8		
17,8		
18,8		
19,8		
20,8		

- Analýza dat**
- Klikněte do oblasti grafu, aby se stal aktivním, a vyberte tlačítko **Odečet hodnot**.
 - Pohybuje kurzorem v grafu po naměřených hodnotách. S rostoucím objemem V na ose x můžeme pozorovat výrazný pokles tlaku p na ose y.
 - Abychom ověřili platnost Boyle-Mariottova zákona, můžeme naměřenými daty proložit funkci nepřímé úměrnosti $y = A/x$.
 - Vyberte **Analýza** → **Proložit křivku**. Zatrhněte **Manuální aproximaci** a vyberte funkci **Převrácená hodnota**. Nyní je potřeba doladit hodnotu koeficientu A. Začněte na hodnotě 1000 a postupně ji upravujte tak, aby proložení odpovídalo naměřeným datům.
 - Zkopírujte data z tabulky do Excelu nebo jiného tabulkového procesoru, případně je zpracovávejte přímo v programu Logger Pro. Vypočítejte součin naměřených hodnot tlaku a objemu. Povšimněte si, že hodnoty součinu jsou velmi blízké hodnotě koeficientu A, kterou jste našli v předchozím kroku. Vysvětlete, proč tomu tak je.
 - Funkce, kterou jste před chvílí našli, může být použita k hledání předpovědí:
 - Jaký bude tlak vzduchu ve stříkačce, když nastavíme následující objemy (tyto hodnoty nesouvisí s provedeným měřením)?

objem (ml)	tlak (kPa)
2,5	
17,8	
520	
0,0012	

b. Můžeme objem nastavit na nulu? Proč ano, či proč ne? Jaký bude odpovídající tlak?

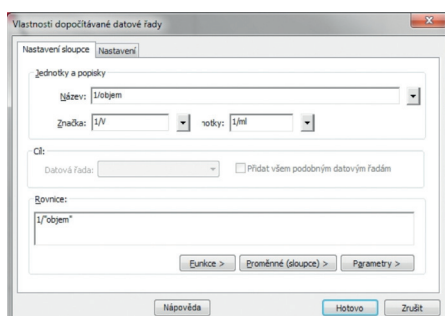
c. Doplňte následující větu:

S tím, jak klesá objem plynu ve stříkačce, jeho tlak _____.

7. Další možností, jak ověřit vztah nepřímé úměrnosti mezi dvěma veličinami, je znázornit graf závislosti velikosti jedné veličiny v závislosti na převrácené hodnotě druhé veličiny. V této aktivitě například tlak v závislosti na převrácené hodnotě objemu vzduchu. Pokud totiž upravíme hledaný vztah $p = \frac{A}{V} = A \cdot \frac{1}{V}$, vidíme, že tlak a převrácená hodnota objemu jsou přímo úměrné. Provedte proto následující test.

a. Vložte nový graf **Vložit**→**Graf**.

b. Vypočítejte převrácenou hodnotu objemu **Data**→**Nový dopočítávaný sloupec**.



c. V nově vytvořeném grafu klikněte na označení os a zvolte odpovídající jednotky: na osu x vložte **1/objem (1/ml)** a na osu y pak **tlak (kPa)**.

d. Pokud se vám graf nezobrazil správně, zvolte **Automatické měřítko (Ctrl+J)**.

e. Můžeme říci, že jsou hodnoty přímo úměrné? Lze zobrazenými body proložit přímkou procházející počátkem? Ověřte volbou **Analýza**→**Proložit křivku**. Zvolte **Přímá úměra, automatická aproximace**.

f. Jaká je hodnota koeficientu přímé úměrnosti? Porovnejte ji s proložením hyperbolou.

Pod tlakem!

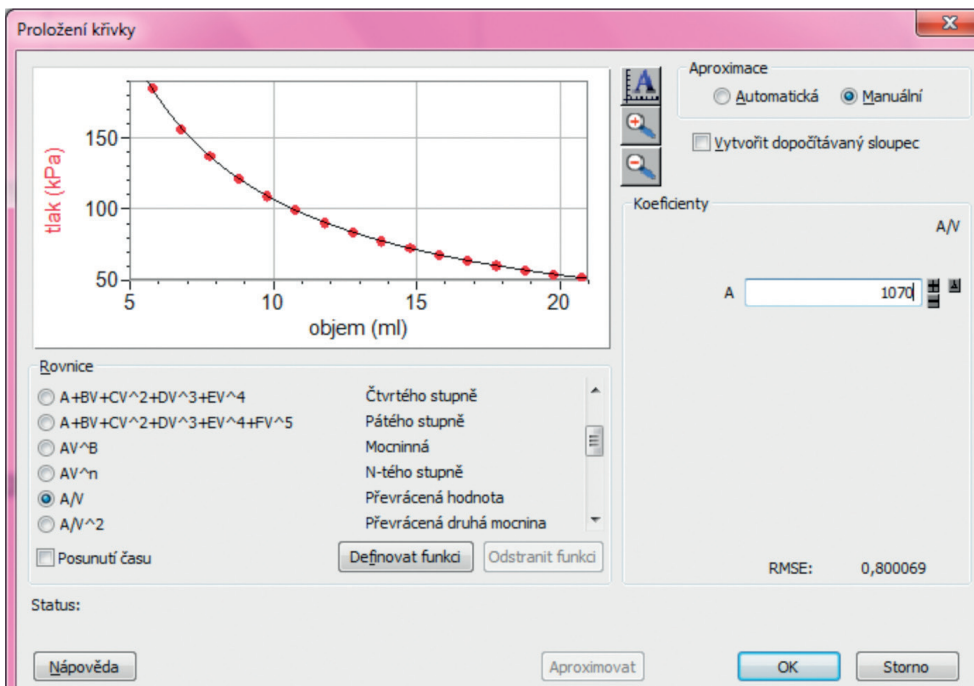
Mirek Kubera

**Tabulka
naměřených
hodnot
(příklad)**

objem V (ml)	tlak p (kPa)	součin p·V (kPa·ml)
10,8	98,7	1066
9,8	108,4	1062
8,8	121,0	1065
7,8	136,5	1065
6,8	155,6	1058
5,8	184,7	1071
11,8	89,5	1056
12,8	83,3	1067
13,8	76,5	1055
14,8	72,2	1069
15,8	67,2	1061
16,8	63,1	1060
17,8	59,6	1060
18,8	56,1	1054
19,8	53,3	1056
20,8	51,0	1060

Výsledky a výpočty

- Při ručním prokládání hyperboly (rovnice $p = \frac{A}{V}$) naměřenými daty zkusíme najít koeficient A , který nejlépe odpovídá naměřeným datům. Lze ho měnit přímým zadáním nebo změnami krokovými přes ovládací prvky. V našem případě má hodnotu přibližně 1070 kPa·ml. Pro tuto hodnotu graf nepřímé úměrnosti pěkně prochází naměřenými body.

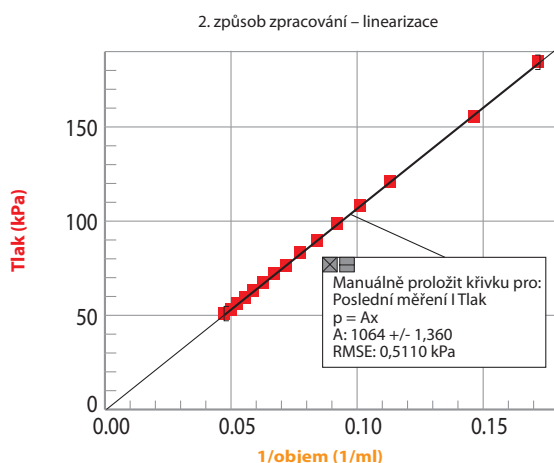


Pod tlakem!

2. Při výpočtu součinu tlaku a objemu vidíme, že tento součin je přibližně konstantní. Po všimněte si, že hodnoty součinu jsou velmi blízké hodnotě koeficientu A , kterou jsme našli v předchozím kroku. Je tomu tak proto, že rovnice nepřímé úměrnosti je $y = \frac{A}{x}$, kde A je konstanta. Vynásobením rovnice funkce hodnotou x získáme rovnici ve tvaru $x \cdot y = A$. Pokud jsme tedy při prokládání bodů ramenem hyperboly postupovali správně, měly by si tyto hodnoty být velmi blízké. Tabulka ukazuje hodnotu kolem 1060 kPa·ml, dobré proložení pak hodnotu 1070 kPa·ml. Shoda je velmi dobrá.
3. Funkce, kterou jste před chvílí našli, může být použita k hledání předpovědi:
 - a. *Jaký bude tlak vzduchu ve stříkačce, když nastavíme následující objemy?*
K odpovědi na položenou otázku využijeme rovnice nepřímé úměrnosti zjištěné v předchozím kroku $p = \frac{1070}{V}$, kde p je tlak v kPa a V objem v ml.

objem (ml)	tlak (kPa)
2,5	428
17,8	60,1
520	2,1
0,0012	891700

- b. *Můžeme objem nastavit na nulu? Proč ano či proč ne? Jaký bude odpovídající tlak?*
Objem nelze nastavit na nulu, protože tomuto objemu by odpovídal nekonečný tlak. Tolik teoreticky. Nelze to udělat ani prakticky, protože vzduch je sice stlačitelný, nikoliv však dokonale. Druhým problémem, na který bychom narazili, že tlakoměr by nevydržel tlaky nad 200 kPa.
 - c. *Doplňte následující větu: S tím, jak klesá objem plynu ve stříkačce, jeho tlak **vzrůstá**.*
4. Analýza nového grafu:
Byla provedena substituce, převrácenou hodnotu objemu $1/V$ nahrazujeme novou veličinou a graficky znázorňujeme závislost tlaku p na $1/V$.



Z grafu vidíme, že tlak je přímo úměrný převrácené hodnotě objemu. Grafickým znázorněním je přímka procházející počátkem. Automatickým proložení přímky získáme její rovnici $p = 1064 \cdot \frac{1}{V}$. Koeficient přímé úměrnosti odpovídá hodnotě zjištěné v předchozí aktivitě.

Vypuštěno!

Petra Směšná

Výstup RVP: žák chápe funkci jako vyjádření závislosti veličin, umí vyjádřit funkční vztah tabulkou, rovnicí i grafem, rozumí symbolickým zápisům, které se týkají funkcí, a užívá je, dovede vyjádřit reálné situace pomocí funkčních vztahů a řeší tak i slovní úlohy

Klíčová slova: lineární funkce, graf funkce

Laboratorní úloha

Doba na přípravu:

10 min

Doba na provedení:

45 min

Obtížnost:

střední

- Úkol**
- Změřte závislost tíhy vody vytékající z trychtýře na čase.
 - Naměřená data proložte lineární funkcí.

Pomůcky Trychtýř s vodou, provázek, siloměr, stojan, nádoba na vytékající vodu, počítač, LabQuest, program Logger Pro

Teoretický úvod Pokud naplníme trychtýř vodou a necháme vodu vytékat, může nás zajímat, za jak dlouho všechna voda vyteče, jak se bude během tohoto procesu měnit tíha trychtýře a jestli se tíha trychtýře s vodou mění podle některé funkce. Toto můžeme zodpovědět pomocí pokusu, kdy budeme měřit závislost tíhy trychtýře, z něhož vytéká voda, na čase.

- Vypracování**
- Upevněte siloměr do stojanu a připojte ho do LabQuestu. Nastavte rozsah na 10 N.
 - Pomocí provázku zavěste trychtýř na siloměr.
 - Umístěte pod trychtýř nádobu na vodu.
 - Protože chcete měřit pouze tíhu vody v trychtýři, počkejte, až se trychtýř přestane houpat, a v programu Logger Pro klikněte na tlačítko **Nulovat** v panelu nástrojů. Tak nebudete brát v potaz tíhu samotného trychtýře.
 - Nastavte dobu měření na 20 s.
 - Ucpěte prstem otvor v trychtýři a naplňte ho vodou.
 - Spusťte měření a rychle uvolněte trychtýř, aby voda mohla odtékat.
 - Počkejte na skončení měření. Pokud se trychtýř nevyprázdnil do skončení měření, měření opakujte pro delší časový úsek.
 - Měli byste dostat graf, který ukazuje klesající funkci. Jakmile voda vyteče, graf funkce bude vodorovný.
 - Pokud doba vyprázdnění trychtýře je mnohem kratší než 20 s, upravte si nastavení grafu tak, aby závěrečná horizontální část nebyla delší než několik sekund. Lze to udělat tak, že kliknete na maximální hodnotu času 20 a místo ní napíšete hodnotu menší.

- Analýza dat**
- Klikněte do oblasti grafu, aby se stal aktivním, a vyberte tlačítko **Odečet hodnot**.
 - V oblasti, kde naměřená data odpovídají klesající lineární funkci, vyberte dva body a запиšte hodnoty jejich souřadnic x a y (zaokrouhluje na dvě desetinná místa).
 - Pomocí těchto bodů spočítejte směrnici přímky a запиšte ji do tabulky.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Proč je tato hodnota záporná?

x_1		y_1	
x_2		y_2	
směrnice			
průsečík s osou x		průsečík s osou y	

Vypuštěno!

- 4) Chceme zjistit rovnici přímky, která odpovídá lineární části vašeho grafu (pouze doba, kdy vytéká voda z trychtýře). K tomu je potřeba průsečík této přímky s osou y , který je v rovnici přímky znázorněn číslem q . Nebudeme ho zjišťovat odečítáním z grafu, protože lineární část grafu nemusí tuto osu protínat. Použijte proto rovnici přímky a místo proměnných dosadte jeden ze zjištěných bodů.

$$y_1 = k \cdot x_1 + q$$

Po úpravách dostanete

$$q = y_1 - k \cdot x_1$$

Zapište tento průsečík do tabulky a napište výslednou rovnici přímky:

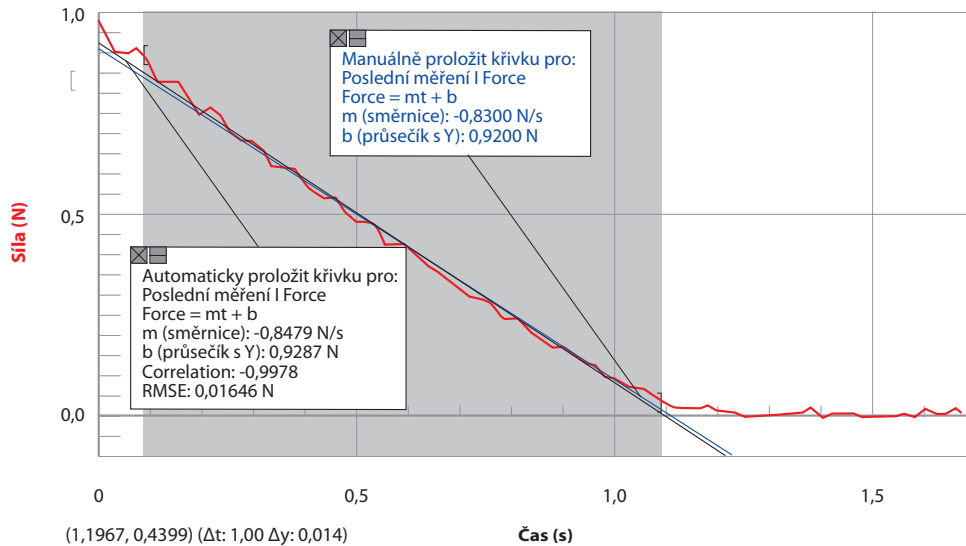
$y =$

- 5) Proložte grafem přímku, jejíž rovnici jste spočítali:
- Vyberte **Analýza** → **Proložit křivku**. Zatrhněte **Manuální aproximace**.
 - V panelu rovnice vyberte $mt + b$ (Lineární).
 - Do pole pro m napište hodnotu směrnice a do pole pro b doplňte průsečík s osou y .
 - Stisknutím tlačítka OK se vrátíte zpátky do grafu.
- 6) Nakolik odpovídá tato přímka naměřeným hodnotám? Prochází některými konkrétními body?
- 7) Spočítejte x -ovou souřadnici průsečíku s osou x a doplňte ji do tabulky společně s jednotkami. Co v našem pokusu tato hodnota značí?
- 8) Můžete také použít program Logger Pro, který proloží daný úsek lineární funkcí.
- Klikněte na graf, aby se stal aktivním.
 - Stisknutím pravého tlačítka a tažením myši vyberte lineární část grafu.
 - Stiskněte tlačítko **Proložit přímku**.
 - Zapište si rovnici přímky, kterou pro vás spočítal program.
- 9) Jsou tyto dvě rovnice rozdílné? Proč by mohly být?
- 10) Jak byste museli upravit podmínky měření, aby vám vyšla pozvolnější přímka? Jak by se změnila směrnice této přímky?

Vypuštěno!

Petra Směšná

Výsledky



x_1	0,26 s	y_1	0,70 N
x_2	0,62 s	y_2	0,40 N
směrnice	-0,83		
průsečík s osou x	1,12 s	průsečík s osou y	0,92 N

Směrnice přímky je záporná, protože se jedná o klesající přímku.

Manuálně spočítaná rovnice přímky: $y = -0,83 \cdot x + 0,92$

Rovnice spočítaná lineární regresí: $y = -0,85 \cdot x + 0,93$

Proložená přímka, jejíž rovnici jsme určili z grafu, vcelku dobře kopíruje naměřená data. Pokud si zobrazíme jednotlivé body, zjistíme, že některými z nich skutečně prochází.

Průsečík s osou x odpovídá času, kdy došlo k vyprázdnění trychtýře. V našem případě přibližně 1,10 s.

Při automatickém proložení naměřených dat přímkou získáváme stejnou rovnici se stejnými koeficienty.

Aby byla přímka pozvolnější, museli bychom zúžit otvor, kterým vytéká voda. Směrnice proložené přímky by pak byla vyjádřena vyšší číselnou hodnotou (pozor – záporná čísla!).

Táhni!

Petra Směšná

Výstup RVP: žák chápe funkci jako vyjádření závislosti veličin, umí vyjádřit funkční vztah tabulkou, rovnicí i grafem, rozumí symbolickým zápisům, které se týkají funkcí, a užívá je, dovede vyjádřit reálné situace pomocí funkčních vztahů a řeší tak i slovní úlohy

Klíčová slova: přímá úměrnost, graf funkce

Laboratorní práce

Doba na přípravu:

5 min

Doba na provedení:

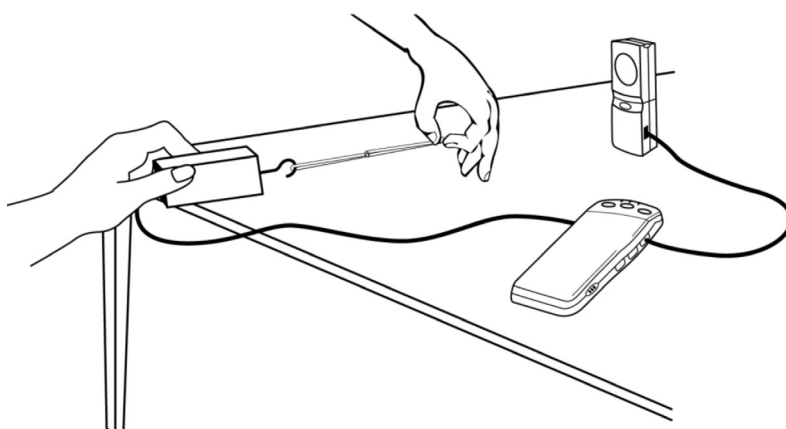
45 min

Obtížnost:

střední

Úkol Změřte závislost síly na prodloužení gumičky.
Naměřená data proložte grafem funkce přímé úměrnosti.

Pomůcky Gumičky, siloměr, počítač, LabQuest, program Logger Pro, detektor pohybu (sonar)



Teoretický úvod Pokud napínáte gumičku, gumička se prodlouží. O kolik se prodlouží, to závisí na síle, jakou napínáte, i na vlastnostech gumičky (jakou má tuhost). Všeobecně se dá říci, že čím větší silou gumičku napínáte, tím víc se prodlouží. Pokud zdvojnásobíte svoji sílu, prodloužení se také zdvojnásobí. O veličinách, které se mění tímto způsobem, říkáme, že jsou přímo úměrné. Pro přímo úměrné veličiny x a y platí vztah:

$$y = k \cdot x$$

- Vypracování**
- 1) V této úloze budete natahovat gumičku. Detektor pohybu bude zaznamenávat polohu vaší ruky, a tím pádem i prodloužení gumičky, zatímco siloměr bude zaznamenávat sílu, kterou gumičku napínáte. Pamatujte, že detektor pohybu nezaznamenává ve vzdálenosti kratší než 15 cm!
 - 2) Zapojte přes LabQuest do počítače siloměr a detektor pohybu.
 - 3) Nastavte rozsah siloměru na 10 N.
 - 4) V programu Logger Pro si připravte měření.
 - a) Klikněte pravým tlačítkem na graf a vyberte **Nastavení grafu**.
 - b) V panelu **Nastavení souřadnicových os** vyberte takové nastavení, aby na ose y byla **Síla (N)** a na ose x **vzdálenost (m)**.
 - c) Ostatní grafy můžete vyjmout (pro lepší rozvržení stránky můžete zvolit **Stránka → Automatické rozvržení stránky**).
 - 5) Nastavte dobu měření na 5 s (**Experiment → Sběr dat**).
 - 6) V panelu nástrojů klikněte na ikonu **Go!** a v nově otevřeném panelu klikněte znovu na ikonu **Go!**. Vyberte **Opačný směr**. V takovémto nastavení se bude vzdálenost, kterou měří detektor pohybu, zvyšovat při pohybu směrem k detektoru.
 - 7) Připravte si rozložení experimentu tak, jak je zobrazeno na obrázku. Možná budete potřebovat druhou osobu, která bude obsluhovat počítač.
 - 8) Jednou rukou držte siloměr (nebo ho k něčemu upevněte). Lehce napněte gumičku směrem od siloměru. Vaše ruka držící gumičku by měla být mezi gumičkou a detek-

Táhni!

torem pohybu. V této pozici vynulujte oba měřicí přístroje pomocí tlačítka **Nulovat** na panelu nástrojů. Snažte se, aby se poloha siloměru a vaší ruky neměnila, dokud nezačne měření.

- 9) Spusťte měření (vy nebo osoba u počítače) a pomalu natahujte gumičku směrem k detektoru pohybu. Snažte se o rovnoměrný pohyb.
- 10) Po skončení měření byste měli dostat graf, který by měl odpovídat grafu lineární funkce. Pokud máte v grafu nepřírovnalé vysoké hodnoty nebo prázdná místa, opakujte měření (nejčastěji je to způsobeno vychýlením ruky mimo dosah sonaru).

Analýza dat

- 1) Pokud natahujete gumičku, zpočátku je síla přímo úměrná prodloužení gumičky. To znamená, že mezi nimi platí vztah $y = A \cdot x$. To otestujeme tak, že proložíme grafem přímkou, která bude odpovídat této rovnici, kde A je směrnice této přímky. (Toto značení odpovídá značení v programu Logger Pro.)
- 2) Klikněte na graf, aby se stal aktivním, a na panelu nástrojů zvolte **Analýza** → **Proložit křivku**.
- 3) Zatrhněte **Manuální aproximace** a vyberte funkci **Přímá úměra**. Teď postupným zvětšováním čísla A najděte takové, pro které odpovídající přímka bude nejvíce odpovídat naměřeným hodnotám.
- 4) Zapište tuto hodnotu A do tabulky. Do grafu se vrátíte stiskem OK.
- 5) Směrnice této přímky může být zjištěna i početně pomocí dosazení souřadnic jednoho bodu do rovnice přímé úměrnosti $y = k \cdot x$.
 - a) Klikněte na graf a potom na tlačítko **Odečet hodnot**.
 - b) Pohybuje kurzorem ke středu grafu a vyberte si bod, jehož souřadnice zapište do tabulky. S jejich pomocí spočítejte k a zapište tamtéž.

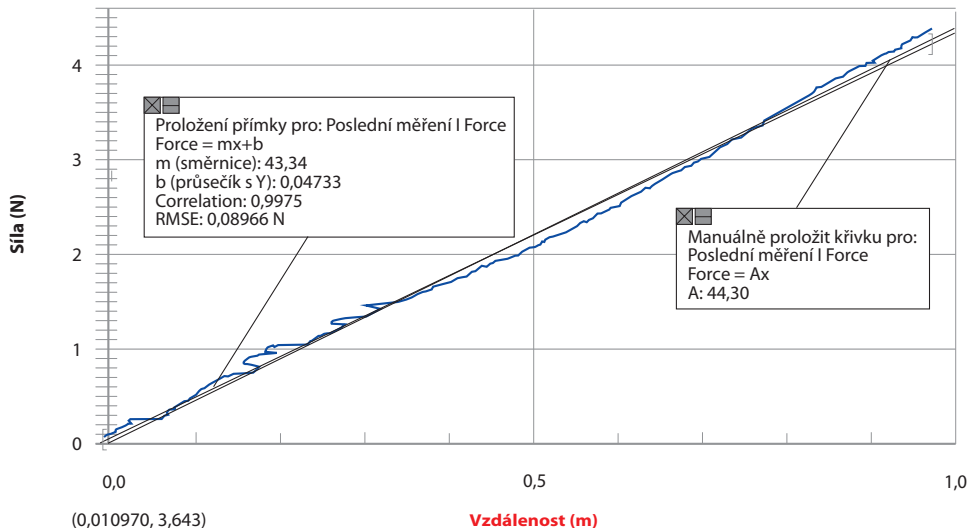
A	
x	
y	
k	

- 6) Jsou hodnoty A a k stejné? Co mohlo způsobit, že jsou trochu rozdílné?
- 7) Kromě dvou předchozích způsobů, jak určit směrnici, dokáže určit směrnici i program Logger Pro a průsečík s osou y přímkou lineární funkce.
 - a) Klikněte na graf, aby se stal aktivním, a potom vyberte tlačítko **Proložit přímkou**.
 - b) Použijte parametry spočítané počítačem a zapište rovnici přímky, která podle programu nejlépe odpovídá naměřeným datům.
- 8) Jaká je směrnice této přímky v porovnání s hodnotami A a k ? Jaká by měla být hodnota y -ové souřadnice průsečíku s osou y ? Proč?
- 9) Která rovnice může odpovídat nejlépe změřené závislosti?
- 10) Jak by se změnila naměřená data, kdybyste použili tužší gumičku? Jak by se změnila hodnota směrnice?

Táhni!

Petra Směšná

Výsledky



A	44,3
x	0,052
y	2,153
k	41,4

Odpovědi na otázky 6) Jsou hodnoty A a k stejné? Co mohlo způsobit, že jsou trochu rozdílné?

Odpověď: Porovnáváme-li hodnoty koeficientů A a k, vidíme, že se od sebe mírně liší. Při prokládání přímkou vypočítanou z jednoho bodu se dopustíme velké chyby v případě, že souřadnice bodu použitého k výpočtu neodpovídají trendu ostatních bodů. Ani manuálním proložením „od oka“ se nemusíme vždy dobře trefit, řádově si však koeficienty odpovídají.

7b) Použijte parametry spočítané počítačem a zapište rovnici přímky, která podle programu nejlépe odpovídá naměřeným datům.

Odpověď: Rovnice spočítaná lineární regresí: $y = 43,34 \cdot x + 0,47$

8) Jaká je směrnice této přímky v porovnání s hodnotami A a k? Jaká by měla být hodnota y-ové souřadnice průsečíku s osou y? Proč?

Odpověď: Tato rovnice obsahuje absolutní člen, který má význam průsečíku s osou y při nulovém prodloužení. Tato hodnota by měla být nulová, ovšem elektronický senzor vykazuje jistý šum, takže naměříme i jinou hodnotu než 0.

9) Která rovnice může odpovídat nejlépe změřené závislosti?

Odpověď: Obě rovnice pěkně popisují velikost působící síly v závislosti na prodlužování gumičky. Mezi veličinami je vztah přímé úměrnosti.

10) Jak by se změnila naměřená data, kdybyste použili tužší gumičku? Jak by se změnila hodnota směrnice?

Odpověď: V případě, že bychom použili silnější gumičku, by měla naměřená přímka větší sklon a její směrnice by byla větší. Tato hodnota je ve fyzice nazývána *tuhost pružiny* (gumičky) a vyjadřuje se v N/m.

Funkce – lineární funkce

Do hloubky!

Petra Směšná

Výstup RVP: žák chápe funkci jako vyjádření závislosti veličin, umí vyjádřit funkční vztah tabulkou, rovnicí i grafem, dovede vyjádřit reálné situace pomocí funkčních vztahů a řeší tak i slovní úlohy

Klíčová slova: lineární funkce, graf funkce, přímá úměrnost, směrnice, sklon přímky, průsečík s osou y

Laboratorní práce

Doba na přípravu:

5 min

Doba na provedení:

45 min

Obtížnost:

nízká

Úkol Změřte závislost tlaku ve vodě na hloubce ponoru. Porovnejte tuto závislost s grafem lineární funkce, kterou proložíte naměřenými body.

Pomůcky Počítač, LabQuest, program Logger Pro, čidlo tlaku, pravítko, dřevěná tyč, izolepa, nůžky, odměrný válec (nebo jiná nádoba na vodu)

Postup Pokud se budete potápět v bazénu, ucítíte tlak ve svých uších. Tento tlak je způsoben množstvím vody, která se nachází mezi vámi a hladinou, a proto roste s hloubkou ponoru. Fyzikální vztah pro hydrostatický tlak má tvar $p_h = h \cdot \rho \cdot g$, kde h je hloubka pod hladinou, ρ hustota vody a g hodnota tíhového zrychlení. Můžeme říci, že tlak závisí lineárně na hloubce. Tuto závislost matematicky popíšeme vztahem $y = k \cdot x + q$, kde y je pro nás tlak a x je hloubka ponoru. Význam konstant k a q objevíme v průběhu naší práce.

- Vypracování**
1. Naplňte válec, jehož výška je alespoň 20 cm, vodou. Na dřevěnou tyč si udělejte rysky po 2,5 cm.
 2. Jeden konec hadičky připojte k čidlu tlaku a druhý konec připevněte izolepou k dřevěné tyčce s ryskou (můžete použít pravítko) v místě nuly.
 3. Spustíte program Logger Pro a připravte měření. V nastavení **Sběru dat** vyberte mód **Události se vstupem**. Nově zadávanou veličinou je **hloubka v cm**.
 4. Nastavte zobrazení měřených veličin. Na vodorovnou osu vyberte **Hloubka (cm)** a na svislou osu **Tlak (kPa)**.
 5. Spustíte **Sběr dat**. Počkejte, až se ustálí hodnota tlaku, a stiskněte **Zachovat**.
 6. Napište 0 cm pro aktuální hloubku.
 7. Ponořte čidlo tlaku s dřevěnou tyčí až po první rysku na tyčce. Čidlo by v této chvíli mělo být 2,5 cm pod hladinou. Stiskněte **Zachovat** a zapište hloubku 2,5 cm.
 8. Ponořte čidlo tlaku po druhou rysku, stiskněte **Zachovat** a zapište aktuální hloubku 5 cm.
 9. Takto pokračujte dále, až máte naměřeno alespoň osm hodnot.
 10. Měření ukončíte stiskem tlačítka **Stop**.

- Analýza dat**
1. Klikněte do oblasti grafu, aby se stal aktivním, a vyberte tlačítko **Odečet hodnot**.
 2. Pohybuje kurzorem po naměřených hodnotách. Vyberte libovolné dva body (x_1, y_1) a (x_2, y_2) a zapište jejich souřadnice do následující tabulky.

	x: Hloubka (cm)	y: Tlak (kPa)
1. bod		
2. bod		

3. Použijte body z vaší tabulky k výpočtu směrnice k .

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} =$$

4. Lineární funkce má tvar $y = k \cdot x + q$, kde q značí průsečík s osou y (v našem případě je to hodnota tlaku v nulové hloubce). Zjistíte ji tak, že v otevřeném grafu posunete kurzorem do bodu s x -ovou souřadnicí $x = 0$ a zapišete hodnotu tlaku v tomto bodě.

Do hloubky!

5. Použijte vaše zjištěné hodnoty k a q a napište rovnici lineární funkce.

$y =$

6. Nyní proložte graf naměřených hodnot přímkou, jejíž rovnici jste spočítali.
- Vyberte **Analýza** → **Proložit křivku**. Zatrhněte **Manuální aproximace**.
 - Vyberte funkci $y = k \cdot x + q$ (lineární).
 - Do pole pro q napište průsečík s osou y , který jste zjistili dříve.
 - Do pole pro směrnici k napište hodnotu, kterou jste spočítali.
7. Jak dobře odpovídá tato přímka vašim hodnotám? Jakými body prochází?

Odpověď:

8. Místo určení rovnice přímky ze dvou bodů můžete použít počítač, který proloží naměřená data lineární funkcí, která bude nejlépe odpovídat všem naměřeným hodnotám.
- Stiskněte tlačítko **Proložit přímkou**.
 - Zapište si rovnici lineární funkce, kterou pro vás počítač spočítal.

$y =$

9. Jsou tyto dvě přímky odlišné? Proč by mohly být?

Odpověď:

10. Speciálním případem lineární funkce je přímá úměrnost. Tato funkce je tvaru $y = k \cdot x$ (hodnota konstanty $q = 0$). Jakým způsobem byste dostali z naší lineární funkce funkci přímé úměrnosti? (Jak by se muselo upravit měření?)

Odpověď:

11. Znáte nějaké další závislosti, které se chovají podobným způsobem? Jaké?

Odpověď:

Zpracování Ukázka naměřených hodnot:

hloubka (cm)	tlak (kPa)
0	99,62084
2,5	99,75991
5	99,99981
7,5	100,2536
10	100,4796
12,5	100,7265
15	100,9316
17,5	101,1402
20	101,3627
22,5	101,5957
25	101,7834

Odpovědi na otázky 2) Pohybuje kurzorem po naměřených hodnotách. Vyberte libovolné dva body (x_1, y_1) a (x_2, y_2) a запиšte jejich souřadnice do následující tabulky.

	x: Hloubka (cm)	y: Tlak (kPa)
1. bod	2,5	99,76
2. bod	22,5	101,60

3) Použijte body z vaší tabulky k výpočtu směrnice k .

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 0,092$$

5) Použijte vaše zjištěné hodnoty k a q a napište rovnici lineární funkce.

$$y = 0,092 \cdot x + 99,62$$

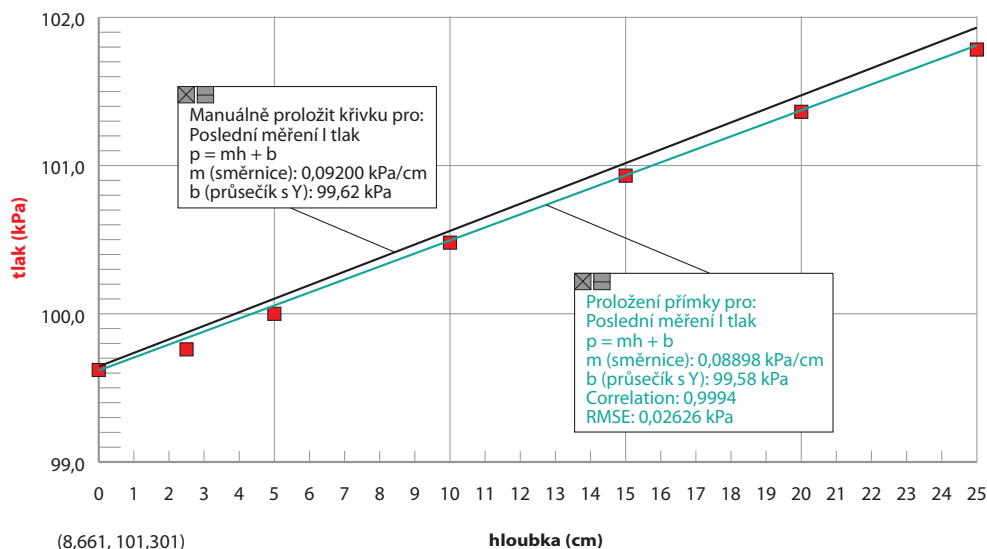
7) Jak dobře odpovídá tato přímka vašim hodnotám? Jakými body prochází?

Odpověď: Přímka prochází prvním naměřeným bodem (průsečík s osou y) a dále nad ostatními body. Proložení tedy není příliš dobré a je ovlivněno tímto prvním měřeným bodem.

úloha 5

Do hloubky!

**Graf
s proloženými
přímkami**



8b) Zapište si rovnici lineární funkce, kterou pro vás spočítal počítač.

$$y = 0,08898 \cdot x + 99,58$$

9) Jsou tyto dvě přímky odlišné? Proč by mohly být?

Odpověď: Ano, tyto dvě přímky nejsou totožné; počítač počítá nejmenší možnou odchylku proložené přímky ze všech naměřených bodů, zatímco v ručním proložení jsme pracovali pouze se dvěma body, které přímku určovaly. To může mít za následek menší přesnost proložené přímky. Z tohoto důvodu je také vhodné vybírat pro ruční proložení dva body, které jsou od sebe dostatečně vzdáleny.

10) Speciálním případem lineární funkce je přímá úměrnost. Tato funkce je tvaru $y = k \cdot x$. Jakým způsobem byste dostali z naší lineární funkce funkci přímé úměrnosti? (Jak by se muselo upravit měření?)

Odpověď: Od naší lineární funkce bychom museli odečíst hodnotu tlaku při prvním měření, kdy byla hadička ještě ve vzduchu. Při novém měření bychom mohli vynulovat tlak vzduchu nad hladinou vody, a měřili bychom tedy pouze hydrostatický tlak.

11) Znáte nějaké další závislosti, které se chovají podobným způsobem? Jaké?

Odpověď: Ano, například napětí na svorkách rezistoru je přímo úměrné proudu, který jím prochází – tzv. Ohmův zákon.

Funkce – kvadratická funkce

Jedeme vzhůru!

Mirek Kubera

- Výstup RVP:** žák načrtne grafy požadovaných funkcí, formuluje a zdůvodňuje vlastnosti studovaných funkcí, modeluje závislosti reálných dějů pomocí známých funkcí
- Klíčová slova:** kvadratická funkce, graf funkce, obecná rovnice paraboly, parabola, vrchol paraboly, průsečíky s osami x a y

Laboratorní práce
Doba na přípravu:
5 min
Doba na provedení:
45 min
Obtížnost:
nízká

- Úkol** 1) Změřte pro vozík pohybující se po nakloněné rovině závislost polohy na čase.
2) Vytvořte vhodný matematický model pro tuto závislost, použijte průsečíky s osami x a y.

Pomůcky Počítač s programem Logger Pro, sonar, vozík, nakloněná rovina délky cca 1 m nebo delší, knihy pro podložení nakloněné roviny

Teoretický úvod Jestliže postrčíme vozík na nakloněné rovině směrem vzhůru, bude při svém pohybu postupně zpomalovat, dosáhne nejvyššího bodu a začne se vracet zpět. Algebraicky budeme moci vyjádřit vztah mezi polohou a časem jako kvadratickou funkci obecné rovnice $y = ax^2 + bx + c$, kde y vyjadřuje polohu vozíku na nakloněné rovině a x pak čas. Koeficienty a, b a c jsou hodnoty, které závisí na sklonu nakloněné roviny a hodnotě počáteční rychlosti. Přestože se vozík pohybuje po přímé dráze (trajektorie je přímka), graf závislosti jeho polohy na čase je parabolický.

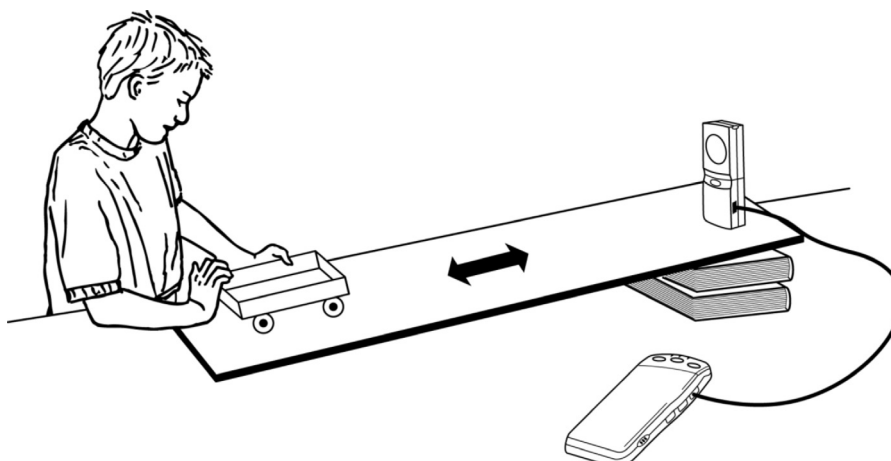
Grafy kvadratické funkce mají několik důležitých bodů – vrchol (maximum nebo minimum této funkce), průsečík s osou y a průsečíky s osou x (pokud existují). Průsečíky s osami x a y jsou spojeny s parametry a, b a c následujícími vztahy:

- 1) y_1 ... průsečík s osou y je roven hodnotě c;
- 2) $x_1 \cdot x_2$... součin průsečíků s osou x je roven poměru $-\frac{c}{a}$;
- 3) $x_1 + x_2$... součet průsečíků s osou x je roven poměru $-\frac{b}{a}$.

Poslední dva vztahy se jmenují Vietovy vzorce.

Tyto vlastnosti znamenají, že pokud známe průsečíky s osami, můžeme najít obecnou rovnici paraboly. Stačí vyřešit soustavu třech rovnic o třech neznámých.

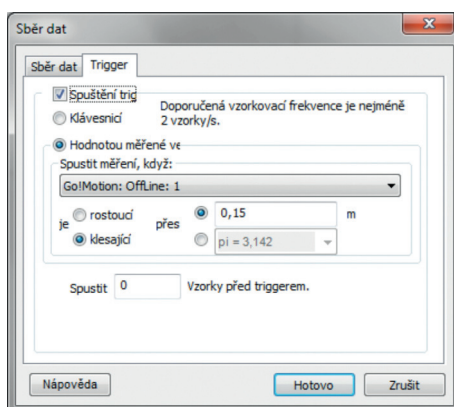
V této aktivitě použijeme detektor pohybu – sonar, abychom změřili změny polohy vozíku na nakloněné rovině v závislosti na čase. Předpokládejme, že se vozík pohybuje bez tření (reálně je tření blízké nule), graf polohy v závislosti na čase bude parabolický a my můžeme použít naměřená data k určení rovnice této paraboly.



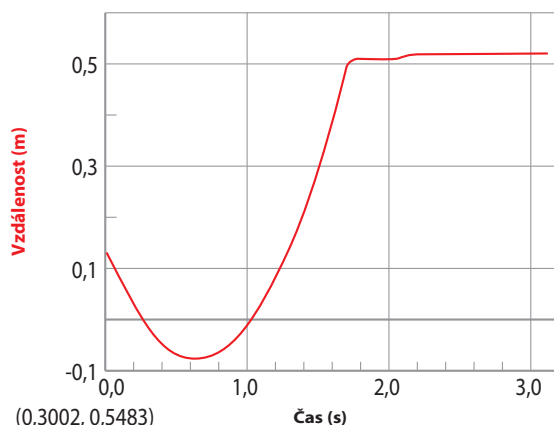
úloha 6

Jedeme vzhůru!

- Vypracování**
1. Vytvořte nakloněnou rovinu. Podložte jeden konec desky nebo kolejnic několika knihami. Úhel sklonu by měl být přibližně 10° . Umístěte sonar na horní konec nakloněné roviny. Vozík by měl být v každém časovém okamžiku od sonaru vzdálen alespoň 0,3 m (sonar nemůže měřit příliš malé vzdálenosti). Pokud tedy máte krátkou desku, podložte sonar jiným předmětem nebo ho upevněte na stativ vedle nakloněné roviny.
 2. Zapojte sonar do portu USB počítače.
 3. Umístěte vozík přibližně 45 cm od sonaru a vynulujte sonar v této poloze (**Experiment** → **Nulovat**). Přesná poloha není důležitá, vozík ale musí při měření projet touto polohou při cestě nahoru i zpět.
 4. Spustíte program Logger Pro a nastavíte měření **Sběr dat** (délka měření 5 s, frekvenci ponechte přednastavenou). Nastavte **Trigger** start měření. Počítač bude měřit, ale začne vykreslovat graf až ve chvíli, kdy vozík projíždí nastavenou pozicí. Protože se vozík přibližuje k sonaru, nastavme klesající funkci a hodnotu například 0,15 m.



5. Vyzkoušejte si uvedení vozíku do pohybu. Musíte ho uvést do pohybu dříve, než je v nulové poloze, a v horní poloze by neměl být příliš blízko sonaru.
6. Spustíte měření a uvedte vozík do pohybu.
7. Měli byste dostat grafickou závislost polohy na čase. Křivka by měla být zcela hladká. Musí obsahovat dva průsečíky s osou x (osa času), průsečík s osou y a vrchol paraboly musí být pod osou x (čas). Poradte se s učitelem, pokud si nejste jisti svými výsledky. Pokud je to nutné, proveďte experiment znovu.



- Analýza dat**
1. Mezi naměřenými daty **vzdálenost jako funkce času** nalezneme úseky lineární, parabolické i jiné. Potřebujeme si vybrat pouze ty parabolické. Jestliže jsme správně nastavili trigger start měření, graf kvadratické funkce začíná v čase $t = 0$ s. Stačí tedy změnit pouze maximum zobrazení časové osy (jako maximum zvolte čas, kdy se vozík ještě pohybuje) a získáme pouze parabolickou část naměřených dat.

2. Nyní již hledejme dva průsečíky s osou x a průsečík s osou y . Pro přesnější určení těchto průsečíků si můžeme v **Nastavení grafu** nastavit funkci **Interpolovat**. Z grafu odečtené hodnoty zapíšeme do tabulky. Použijeme funkci **Odečtet hodnot**. Tyto body mají dvě souřadnice, nás zajímá hodnota y , resp. x , protože druhá hodnota je vždy nulová.

průsečík y_1	průsečík x_1	průsečík x_2

3. Vypočítejte součin a součet průsečíků grafu kvadratické funkce s osou x :

$x_1 \cdot x_2$	
$x_1 + x_2$	

4. Použijte tyto hodnoty k určení koeficientů a, b, c v obecné rovnici paraboly $y = ax^2 + bx + c$. Zapište tyto hodnoty do tabulky.

parametr	hodnota
a	
b	
c	

5. Zapište výsledný tvar hledané rovnice paraboly: _____.
6. Nyní můžeme přistoupit k zakreslení této paraboly do naměřeného grafu. Označte graf. Vyberte **Analýza** → **Proložit křivku**. Zvolte **kvadratickou funkci** a **manuální proložení**. Zapište do modelu vámi vypočítané hodnoty koeficientů a, b, c .
7. Prochází vložená křivka naměřenými daty? Je toto proložení přesné?

Další úkoly

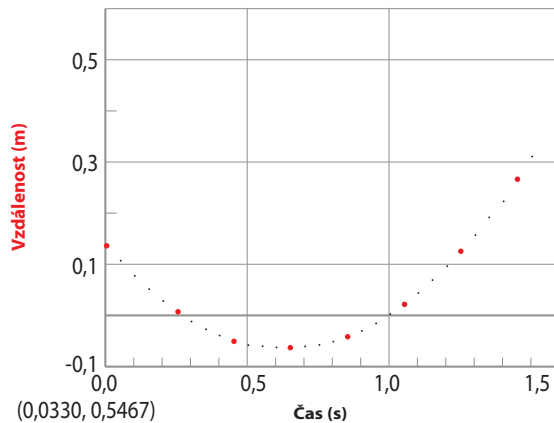
- a. Předpokládejme, že sonar byl umístěn na spodním konci nakloněné roviny. Jak budou vypadat naměřená data? Jaký bude tvar takto získané paraboly? Jaké budou mít hodnoty koeficienty a, b a c ? Vysvětlete.
- b. Hodnoty koeficientů můžeme také určit pomocí programu Logger Pro automaticky. Musíme zvolit místo manuálního proložení automatické. Odpovídá automatické proložení a koeficienty a, b a c ručnímu proložení, které jste před chvílí dokončili?

Funkce – kvadratická funkce

Jedeme vzhůru!

Mirek Kubera

- Zpracování** 1. Mezi naměřenými daty **vzdálenost jako funkce času** nalezneme úseky lineární, parabolické i jiné. Potřebujeme si vybrat pouze ty parabolické. Jestliže jsme správně nastavili trigger start měření, parabola začíná v čase $t = 0$ s. Stačí tedy změnit maximum zobrazení časové osy (např. 1,65 s jako v našem případě) a získáme pouze parabolickou část naměřených dat.



2. Nyní již hledejme dva průsečíky s osou x a průsečík s osou y . Pro přesnější určení těchto průsečíků si můžeme v **Nastavení grafu** nastavit funkci **Interpolovat**. Z grafu odečtené hodnoty zapíšeme do tabulky. Použijeme funkci **Odečet hodnot**.

průsečík y_1	průsečík x_1	průsečík x_2
0,1386	0,271	1,003

3. Vypočítejte součin a součet průsečíků grafu kvadratické funkce s osou x :

$x_1 \cdot x_2$	0,271813
$x_1 + x_2$	1,274

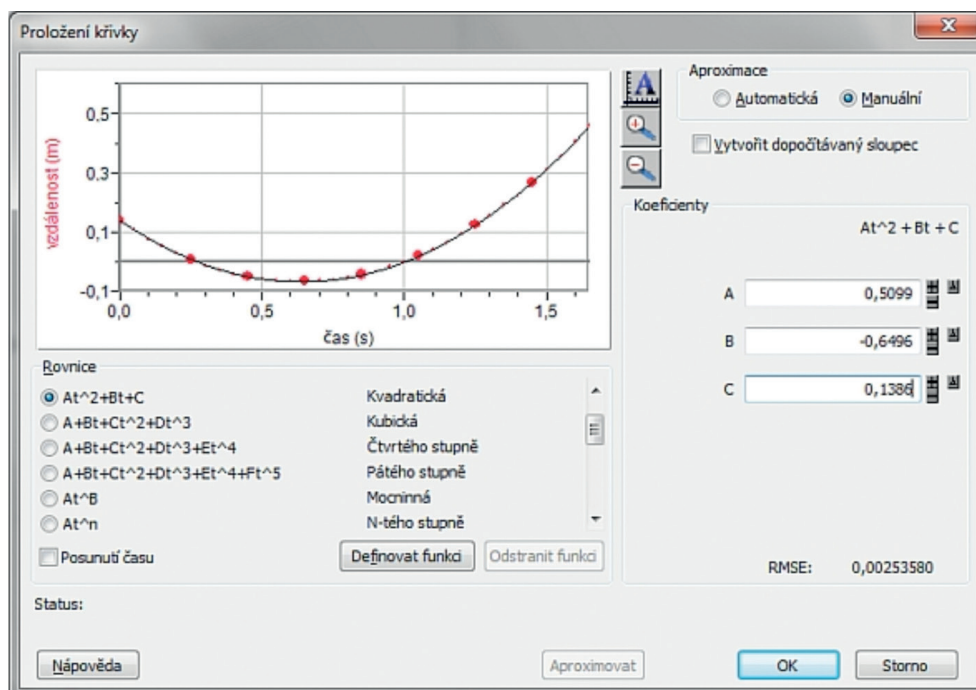
4. Použijte tyto hodnoty k určení koeficientů a, b, c v obecné rovnici paraboly $y = ax^2 + bx + c$. Zapište tyto hodnoty do tabulky.

parametr	hodnota
a	0,5099
b	-0,6496
c	0,1386

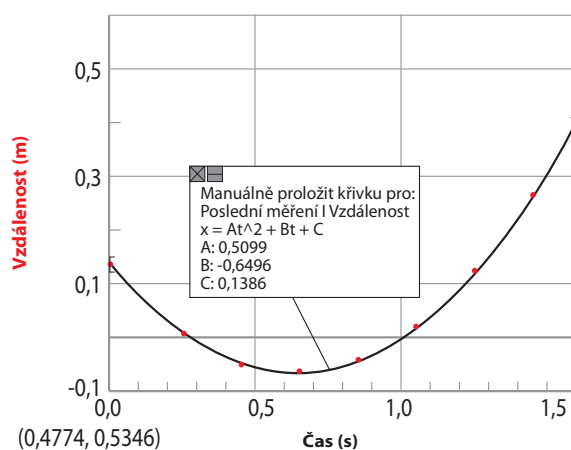
5. Zapište výsledný tvar hledané rovnice paraboly: $y = 0,5099x^2 - 0,6496x + 0,1386$.
 6. Nyní můžeme přistoupit k zakreslení této paraboly do naměřeného grafu. Označte graf. Vyberte **Analýza** → **Proložit křivku**. Zvolte **kvadratickou funkci** a **manuální proložení**. Zapište do modelu vámi vypočítané hodnoty koeficientů a, b a c .



Jedeme vzhůru!



8. Prochází vložená křivka naměřenými daty? Je toto proložení přesné?



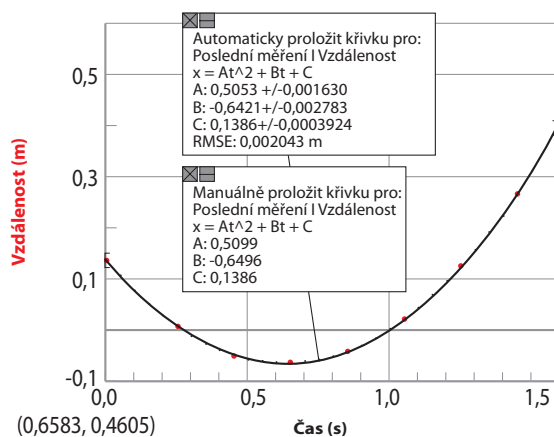
Předložený graf ukazuje, že proložení je velmi dobré a naměřenou vzdálenost v závislosti na čase lze tedy modelovat kvadratickou funkcí.

- Další úkoly** a. Předpokládejme, že sonar byl umístěn na spodním konci nakloněné roviny. Jak budou vypadat naměřená data? Jaký bude tvar takto získané paraboly? Jaké budou mít hodnoty koeficienty a , b a c ? Vysvětlete.

Umístíme-li sonar na spodní konec nakloněné roviny, bude se vzdálenost měřená se sonarem v první fázi zvětšovat až ke svému maximu. Vozík se zastaví a začne se rozjíždět zpět dolů po nakloněné rovině. Jeho vzdálenost se tedy bude opět zmenšovat. Parabola bude obrácená vrcholem vzhůru. Koeficient a by měl být záporný. Pokud by se jednalo o jinak stejný experiment, zbývající koeficienty b a c by zůstaly nezměněny.

- b. Hodnoty koeficientů můžeme také určit pomocí programu Logger Pro automaticky. Musíme zvolit místo manuálního proložení automatické. Odpovídá automatické proložení a koeficienty a , b a c ručnímu proložení, které jste před chvílí dokončili?

Pokud zvolíme automatické proložení, získáme křivku, která přesně prochází naměřenými daty. Koeficienty v obecné rovnici paraboly jsou prakticky stejné. Křivky se prakticky neliší.



Projdeme se?

Petra Směšná

Výstup RVP: žák chápe funkci jako vyjádření závislosti veličin, umí vyjádřit funkční vztah tabulkou, rovnicí i grafem, dovede vyjádřit reálné situace pomocí funkčních vztahů a řeší tak i slovní úlohy

Klíčová slova: lineární funkce, přímá úměrnost, dráha, doba pohybu, obsah plochy pod grafem

Laboratorní práce

Doba na přípravu:

5 min

Doba na provedení:

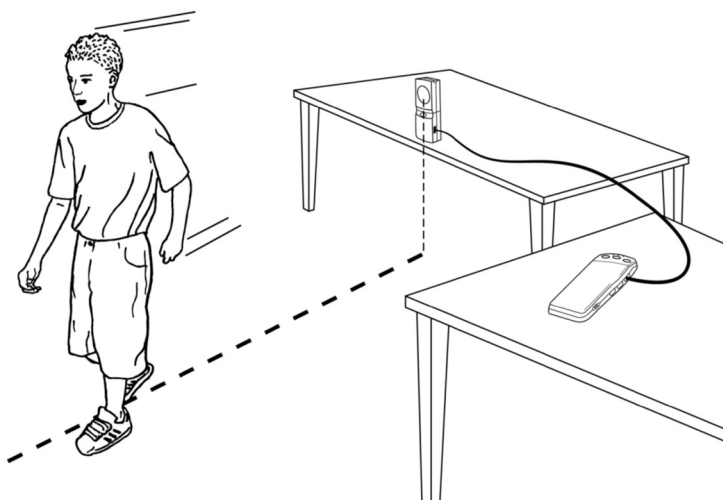
45 min

Obtížnost:

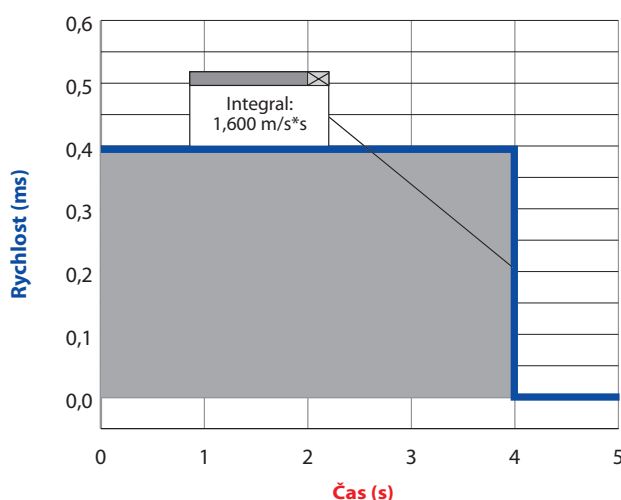
střední

- Úkol**
- 1) Změřte závislost dráhy a rychlosti na čase pro člověka v chůzi.
 - 2) Spočítejte plochu pod grafem závislosti rychlosti na čase.
 - 3) Porovnejte tuto hodnotu s celkovou dráhou, kterou chodec ušel.

Pomůcky Počítač, program Logger Pro, detektor pohybu (sonar)



Teoretický úvod Rychlost pohybu určíme jako podíl změny dráhy a změny času $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Pokud intervaly dráhy a času budeme snižovat na co nejmenší hodnoty, budeme se blížit vyjádřením k okamžité rychlosti. Budou-li tyto intervaly větší, budeme se blížit k průměrné rychlosti. Průměrná rychlost se spočítá jako podíl celkové dráhy a celkového času $v = \frac{s}{t}$, a je to taková rychlost, jakou bychom se museli pohybovat rovnoměrným pohybem po čas t , abychom ušli dráhu s . Pokud známe průměrnou rychlost a celkový čas, můžeme z toho vyjádření vyjádřit dráhu: $s = v \cdot t$.



Projedeme se?

Pokud je rychlost konstantní, lze spočítat celkovou dráhu jako součin této rychlosti a času, po který se danou rychlostí pohybujeme. Pokud sledujeme graf závislosti rychlosti na čase, pak vidíme, že tento součin je roven velikosti plochy pod křivkou. Jak ale spočítat dráhu, když rychlost není konstantní?

Jeden způsob je, že použijeme místo okamžité rychlosti rychlost průměrnou, kterou dosadíme do vztahu pro výpočet dráhy. Můžeme ale také využít grafu a spočítat plochu pod křivkou v grafu závislosti rychlosti na čase. Pro lineární lomené funkce to umíme spočítat velmi jednoduše. Matematický nástroj, který se nazývá integrál, toto zvládne i pro rychlosti, které se s časem mění (vyjádřené libovolnou křivkou).

- Vypracování**
- 1) Postavte detektor pohybu na stůl tak, aby mířil do otevřeného prostoru, a připojte ho k počítači.
 - 2) V programu Logger Pro si připravte měření.
 - a) Klikněte pravým tlačítkem na graf a vyberte **Nastavení grafu**.
 - b) V panelu **Nastavení souřadnicových os** vyberte takové nastavení, aby na ose y byla **Vzdálenost (m)** a na ose x **čas (s)**
 - c) Ostatní grafy můžete vyjmout (pro lepší rozvržení stránky můžete zvolit **Stránka → Automatické rozvržení stránky**).
 - 3) Nastavte dobu měření na 5 s (**Experiment → Sběr dat**).
 - 4) Postavte se před detektor pohybu a připravte se na chůzi směrem od něj.
 - 5) Spusťte měření a až uslyšíte cvakání sonaru, počkejte jednu sekundu a pak se rozejděte. Jděte pomalým a rovnoměrným krokem po dobu dvou nebo tří sekund. Pak se zastavte a počkejte na konec měření.
 - 6) Prozkoumejte graf. Měli byste vidět horizontální úsečku, následovanou lineárně rostoucí funkcí, a nakonec zase horizontální úsečku. Pokud máte v grafu skokové změny nebo prázdná místa, opakujte měření.

- Analýza dat**
- 1) Klikněte na graf, aby se stal aktivním, a stiskněte tlačítko **Odečet hodnot**.
 - 2) Pomocí myši se pohybujte po grafu. Hodnoty x odpovídají času a hodnoty y odpovídají vzdálenosti od sonaru.
 - 3) Odečtěte z grafu vzdálenost a jí odpovídající čas, kdy se tato vzdálenost začala zvyšovat. Zapište tyto hodnoty do tabulky jako počáteční vzdálenost a počáteční čas. To stejné udělejte pro vzdálenost a čas, kdy se vzdálenost od sonaru přestala měnit (zapište do tabulky jako koncový čas a koncová vzdálenost). Do tabulky pište hodnoty i s jednotkami a zaokrouhluje na tři desetinná místa.

počáteční čas	
konečný čas	
doba pohybu	
počáteční vzdálenost	
konečná vzdálenost	
odhadnutá průměrná rychlost	
průměrná rychlost, Logger Pro	
dráha pohybu (z odhadnuté průměrné rychlosti)	
dráha pohybu (z průměrné rychlosti, Logger Pro)	
dráha pohybu (z grafu)	
integrál	

- 4) Klikněte levým tlačítkem v grafu na popisek osy y, **vzdálenost (m)**, a nastavte **Velocity** neboli rychlost (m/s).
- 5) Vyberte tlačítko **Odečet hodnot** a vyberte hodnotu, která se vám zdá, že by mohla nejlépe odpovídat průměrné rychlosti. Nenechte se zaskočit vzhledem grafu. Může být i značně nepravidelný, někdy je vidět každý krok jako mírné zhoupnutí v grafu rychlosti. Zapište tuto hodnotu do tabulky (odhadnutá průměrná rychlost).
- 6) Lze použít program Logger Pro, aby spočítal hodnotu průměrné rychlosti.

- a) V grafu závislosti rychlosti na čase najdete bod, jehož čas odpovídá vašemu počátečnímu času. Levým tlačítkem myši označte část grafu až po čas, který odpovídá vašemu času koncovému.
- b) Klikněte v panelu nástrojů na tlačítko **Statistika**.
- c) Objeví se statisticky spočítané hodnoty a jednou z nich je i průměrná rychlost. Zapište ji do tabulky (průměrná rychlost, Logger Pro).
- 7) Porovnejte zjištěné průměrné rychlosti. Jak se liší? Proč se mohou lišit?
- 8) Nyní, po zjištění důležitých dat z grafu, můžete spočítat ušlou dráhu několika způsoby.
 - a) Pomocí počátečního a koncového času spočítejte dobu pohybu a zapište ji do tabulky i s jednotkami.
 - b) Spočítejte dráhu pohybu pomocí času a odhadnuté průměrné rychlosti $s = v \cdot t$. Zapište ji do tabulky i s jednotkami.
 - c) Spočítejte dráhu pohybu pomocí času a průměrné rychlosti spočítané programem a zapište ji do tabulky i s jednotkami.
 - d) Spočítejte dráhu uraženou chodcem přímo z grafu závislosti vzdálenosti na čase (pomocí počáteční a konečné vzdálenosti). Zapište ji do tabulky i s jednotkami.
- 9) Porovnejte tyto tři hodnoty pro dráhu. Která odpovídá skutečnosti nejlépe a proč?
- 10) Většinou bývá plocha udávána v jednotkách m^2 . Všimněte si, že „plocha“ pod křivkou v grafu závislosti rychlosti na čase má jednotky m. Proč tomu tak je? Uvědomte si, v jakých jednotkách jsou měřeny veličiny na osách x a y.

Úkol pro zvědavé Zopakujte krok 6), ale místo tlačítka **Statistika** použijte tlačítko **Integrál**. Integrál spočítá plochu pod naměřeným grafem. Jaké jsou jednotky výsledku integrálu? Jaké veličině odpovídá tato hodnota?

Projedeme se?

Petra Směšná

Výsledky

počáteční čas	0,75 s
konečný čas	3,05 s
doba pohybu	2,3 s
počáteční vzdálenost	0,719 m
konečná vzdálenost	2,961 m
odhadnutá průměrná rychlost	1,146 m/s
průměrná rychlost, Logger Pro	0,991 m/s
dráha pohybu (z odhadnuté průměrné rychlosti)	2,636 m
dráha pohybu (z průměrné rychlosti, Logger Pro)	2,249 m
dráha pohybu (z grafu)	2,242 m
integrál	2,244 m

Odpovědi na otázky 7) Porovnejte zjištěné průměrné rychlosti. Jak se liší? Proč se mohou lišit?

Odpověď: Odhadnutá a průměrná rychlost jsou řádově stejné, hodnoty se ale nepatrně liší. Velmi záleží na vybraném intervalu, který budeme statisticky zpracovávat.

9) Porovnejte tyto tři hodnoty pro dráhu. Která odpovídá skutečnosti nejlépe a proč?

Odpověď: Hodnoty jsou přibližně stejné, největší odchylku vykazuje hodnota spočítaná z odhadnuté průměrné rychlosti. Odhad průměrné rychlosti je obtížný a nepřesný. Nejpřesnější hodnotu získáme odečítáním z grafu závislosti polohy na čase.

10) Většinou bývá plocha udávána v jednotkách m^2 . Všimněte si, že „plocha“ pod křivkou v grafu závislosti rychlosti na čase má jednotky m. Proč tomu tak je? Uvědomte si, v jakých jednotkách jsou měřeny veličiny na osách x a y.

Odpověď: Jednotky plochy pod křivkou jsou m, protože násobíme rychlost v $m \cdot s^{-1}$ a čas v s. Výsledná jednotka veličiny vyjádřené plochou pod grafem je ураžená vzdálenost v m, a nikoliv plocha v m^2 .

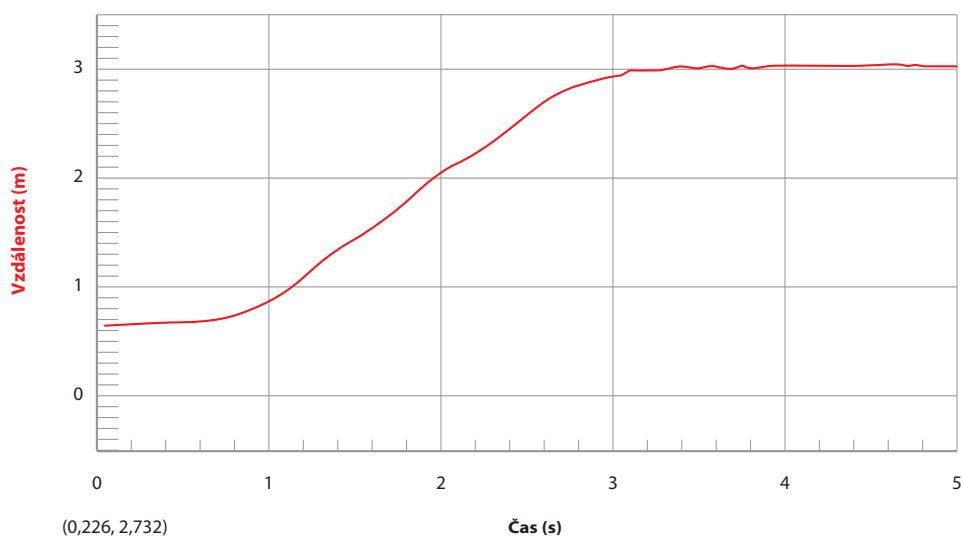
Úkol pro zvědavé 1) Zopakujte krok 6), ale místo tlačítka **Statistika** použijte tlačítko **Integrál**. Integrál spočítá plochu pod křivkou. Jaké jsou jednotky výsledku integrálu? Jaké veličině odpovídá tato hodnota?

Odpověď: Jednotky výsledku integrálu jsou opět m, což je jednotka ураžené vzdálenosti.

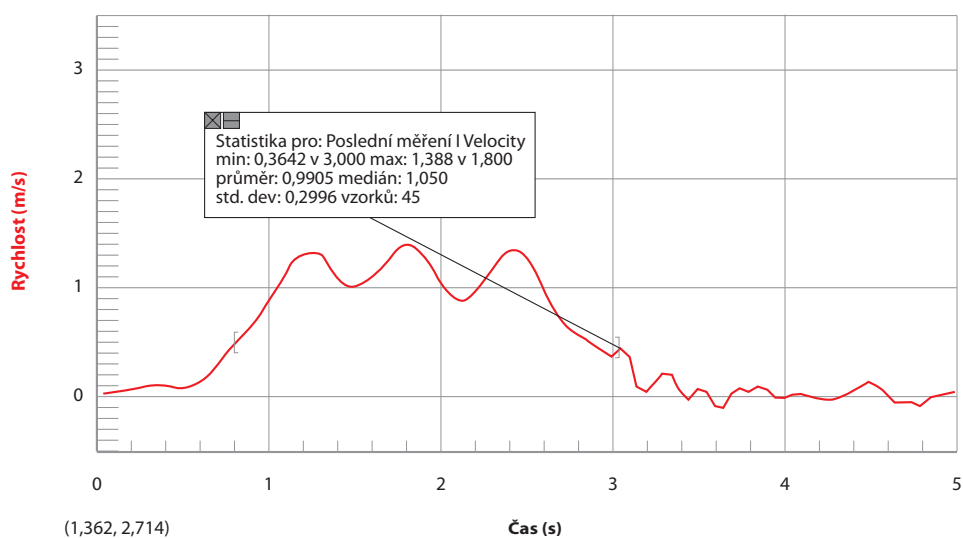
úloha 7

Projedeme se?

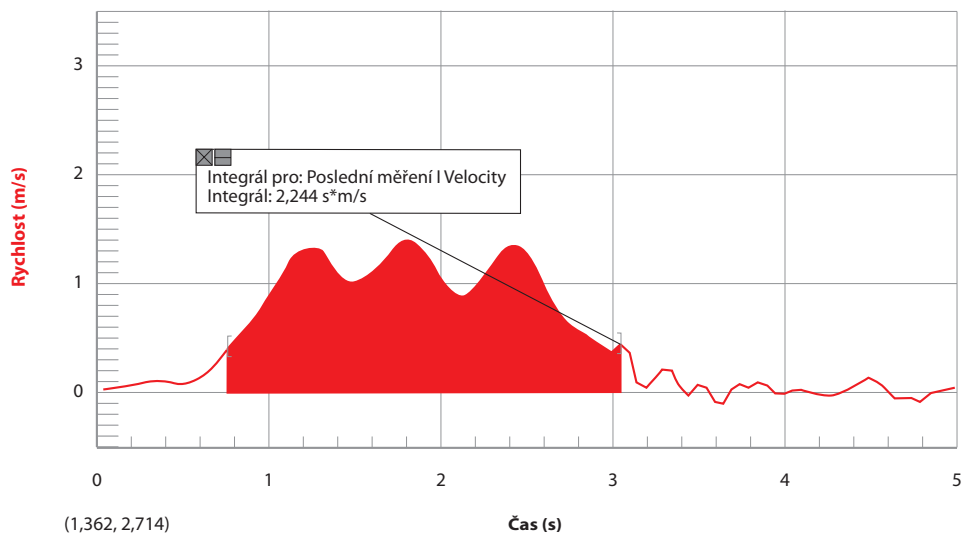
**Graf
závislosti
vzdálenosti
na čase**



**Graf
závislosti
rychlosti
na čase
spolu
s výsledky
STATISTIKY**



**Graf
závislosti
rychlosti
na čase
spolu
s výsledkem
INTEGRÁLU**



Pojďme se setkat!

Petra Směšná

Výstup RVP: žák měří dané veličiny, analyzuje a zpracovává naměřená data, rozumí pojmu řešení soustavy dvou lineárních rovnic, chápe souvislost rovnoměrného pohybu a lineárních funkcí

Klíčová slova: soustavy lineárních rovnic, průsečík dvou přímek, grafické řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

Laboratorní práce

Doba na přípravu:

5 min

Doba na provedení:

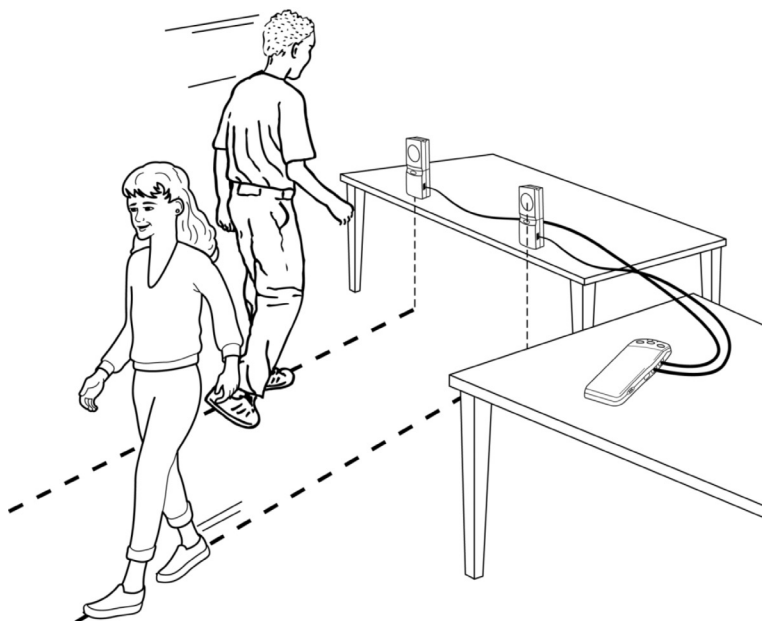
90 min

Obtížnost:

střední

- Úkol**
- Změřte závislost dráhy a rychlosti na čase pro dva chodce.
 - Najděte rovnice přímek, které popisují pohyb dvou chodců, a najděte jejich průsečík.
 - Vyřešte soustavu dvou lineárních rovnic popisující pohyb obou chodců.

Pomůcky Počítač, program Logger Pro, dva detektory pohybu (sonar), metr, stopky



Teoretický úvod V běžném životě se můžeme setkávat s problémy, kde se vyskytuje více proměnných a k jejich řešení je třeba soustavy dvou či více matematických rovnic. Dále se budeme zabývat nejjednodušším typem těchto soustav – soustavami dvou lineárních rovnic o dvou neznámých.

Řešením soustavy je uspořádaná dvojice čísel. Když dosadíme za neznámé, dostaneme u obou rovnic platné rovnosti. Pokud znázorníme tuto soustavu rovnic graficky, dostaneme graf dvou přímek. Řešení potom odpovídá souřadnicím průsečíku těchto přímek (pokud takovýto průsečík existuje).

Pokud se člověk pohybuje rovnoměrným pohybem v jednom směru, pak jeho vzdálenost v závislosti na čase určuje lineární funkce $y = kx + q$, kde y značí vzdálenost, x je čas, q je počáteční vzdálenost (v čase $x = 0$) a k odpovídá rychlosti pohybu. Budeme-li mít dvě pohybující se osoby, dostáváme dvě lineární rovnice o dvou neznámých, kterým odpovídají grafy dvou přímek.

V této úloze budeme modelovat takový případ, kdy jdou dvě osoby proti sobě a potkají se. Matematicky tuto situaci znázorníme graficky i pomocí soustavy dvou lineárních rovnic.

- Vypracování**
- Postavte detektory pohybu na stůl tak, aby mířily rovnoběžně do otevřeného prostoru, a připojte je k počítači. Detektory by měly být od sebe vzdáleny alespoň 1,5 m.
 - Nastavte dobu měření na 8 s (**Experiment** → **Sběr dat**).
 - Budete potřebovat celkem 4 lidi. Dva budou chodit před detektory, třetí bude stopovat čas na stopkách a čtvrtý člověk označí místo, kde se dva chodci budou míjet.

Pojďme se setkat!

Samotné měření bude probíhat tímto způsobem: chodci si stoupnou před detektory – jeden ve vzdálenosti 0,5 m před prvním detektorem, druhý ve vzdálenosti 3 m od druhého detektoru. Až zahájíme měření, první člověk se rozejde směrem od detektoru a druhý člověk směrem k detektoru. Jakmile započne měření, spustí třetí člověk stopky. Zastaví je ve chvíli, kdy dva chodci budou procházet kolem sebe (= potkají se). V té chvíli čtvrtý člověk označí například samolepkou místo, kde se potkali. Chodci pokračují dál. První se zastaví 3 m od detektoru, druhý 0,5 m před detektorem (tyto hodnoty berte jako přibližné).

Je vhodné si toto měření několikrát vyzkoušet. Důležité je, aby v naměřeném grafu nebyly skokové změny nebo prázdná místa.

- 4) Spustíte měření a postupujete podle předchozího kroku.
- 5) Prozkoumejte graf závislosti vzdálenosti na čase. Pro prvního chodce by měl být lineárně rostoucí, pro druhého chodce lineárně klesající.
- 6) Po úspěšném měření nechte čtvrtého člověka, ať změří vzdálenost místa, kde se chodci potkali, od spojnice detektorů. Tuto vzdálenost, stejně jako čas na stopkách, zapište do tabulky.

- Analýza dat**
- 1) Jak poznáte z grafu, která křivka odpovídá kterému chodci? Označte si je.
 - 2) Klikněte na graf, aby se stal aktivním, a stiskněte tlačítko **Odečet hodnot**.
 - 3) Zaznamenejte do tabulky souřadnice bodu, kde se obě křivky protínají (jako místo a čas setkání).

	stopky, metr	graf	rovnice
čas setkání			
místo setkání			

	x_1	y_1	x_2	y_2	směrnice	průsečík s osou y
první chodec						
druhý chodec						

- 4) Budeme chtít zjistit rovnice přímk, které odpovídají grafu pohybu jednotlivých chodců. K tomu budeme potřebovat souřadnice dvou bodů křivky grafu od každého chodce. Při tomto odečítání ignorujte jakékoliv horizontální části na začátku, nebo na konci měření. Je vhodné zvolit vzdálené body.

Zaznamenejte tyto body do tabulky.

- 5) Pomocí těchto bodů spočítejte směrnice k daných přímk. Použijte vztah

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Co v našem případě znázorňuje směrnice (jaké má jednotky)?

- 6) Pomocí rovnice $y = kx + q$ spočítejte průsečík s osou y (neboli číslo q). Spočítejte tento průsečík pro oba chodce.
- 7) Zapište si rovnice přímk, které odpovídají grafu, pro oba chodce.
- 8) Proložte naměřená data grafy přímk, jejichž rovnice jste spočítali.
 - a) Nejprve pro prvního chodce; klikněte na **Analýza→Proložit křivku**, označte **Poslední měření|vzdálenost 1** a stiskněte OK.
 - b) Vyberte Manuální aproximaci a v panelu rovnic zaškrtněte (lineární). Je to analogie k běžnému výrazu $y = kx + q$.
 - c) Do parametrů zapište směrnici a průsečík s osou y, které jste spočítali, pro prvního chodce. Po kliknutí na OK se vrátíte do grafu.
 - d) Nyní opakujte postup i pro druhého chodce.
- 9) Nakolik odpovídají proložené přímky naměřeným hodnotám?
- 10) Nyní můžete zjistit průsečík těchto dvou přímk i početně. Zapište si rovnice obou přímk pod sebe. Dostáváte tím soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Řešením soustavy jsou hodnoty x a y , které odpovídají oběma rovnicím. V našem případě

jsou to hodnoty času a vzdálenosti, které měli naši chodci společné (místo a čas, kdy se chodci potkali). Vyřešte tuto soustavu dvou lineárních rovnic a její řešení zapište do tabulky.

- 11) Porovnejte zjištěné časy a vzdálenosti, které jste změřili, odečetli z grafu a dostali jako řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých. Liší se tyto hodnoty?
- 12) Pokud řešíme soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, může řešení dopadnout trojím způsobem:
 - a) soustava má jedno řešení,
 - b) soustava má nekonečně mnoho řešení,
 - c) soustava nemá žádné řešení.

Jak bude vypadat graf dvou lineárních funkcí, aby jejich soustava měla jedno, nekonečně mnoho, žádné řešení? Jakým způsobem by bylo třeba upravit pohyb chodců, abyste takového grafy dostali? Vyzkoušejte.

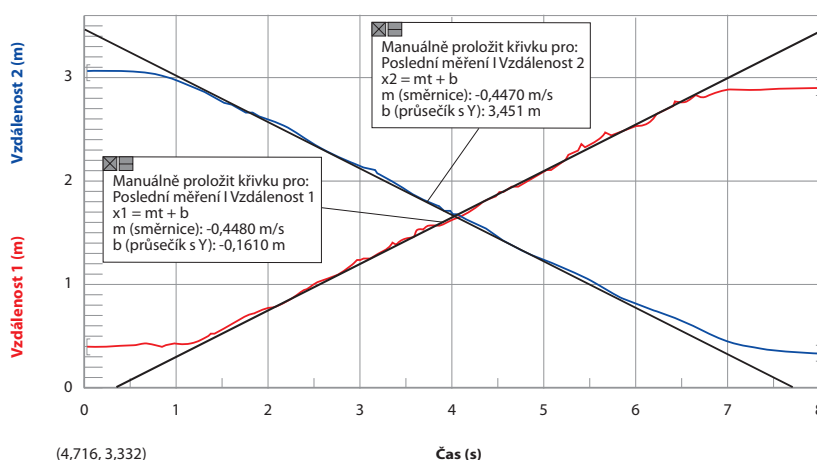
Pojďme se setkat!

Petra Směšná

Zpracování

	stopky, metr	graf	rovnice
čas potkání	3,47 s	4,09 s	4,036 s
místo potkání	1,7 m	1,65 m	1,647 m

	x_1	y_1	x_2	y_2	směrnice	průsečík s osou y
první chodec	2,21 s	0,83 m	5,18 s	2,16 m	0,448 m/s	-0,161 m
druhý chodec	1,815 s	2,639 m	4,62 s	1,386 m	-0,447 m/s	3,451 m



Odpovědi na otázky 5) Co v našem případě znázorňuje směrnice (jaké má jednotky)?

Odpověď: Směrnice znázorňuje rychlost chodce a má jednotku m/s.

7) Zapište si rovnice přímk, které odpovídají grafu, pro oba chodce.

Odpověď: první chodec $y = 0,448 \cdot x - 0,161$, druhý chodec $y = -0,447 \cdot x + 3,451$.

9) Nakolik odpovídají proložené přímky naměřeným hodnotám?

Odpověď: Proložené přímky dobře kopírují naměřená data, jsou tedy dobrým modelem studované závislosti. Drobné odchylky jsou způsobeny nerovnoměrností chůze.

11) Porovnejte zjištěné časy a vzdálenosti, které jste změřili, odečetli z grafu a dostali jako řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých. Liší se tyto hodnoty?

Odpověď: Až na přímé měření se tyto hodnoty příliš neliší. Přímé měření času je zatíženo reakční dobou pozorovatele, která může dosáhnout až 0,4 s.

12) Jak bude vypadat graf dvou lineárních funkcí, aby jejich soustava měla jedno, nekonečně mnoho, žádné řešení? Jakým způsobem by bylo třeba upravit vaše měření, abyste takovéto grafy dostali? Vyzkoušejte.

Odpověď: Naše úloha modeluje soustavu s jedním řešením (přímky jsou různoběžné). Je to vidět již z koeficientů proložených funkcí. Mají opačné znaménko, což znamená, že jde o různoběžné přímky. Má-li mít soustava nekonečně mnoho řešení, musí jít o totožné přímky a chodci se musí pohybovat stejnou rychlostí, ve stejném směru a ze stejné počáteční polohy. Abychom nezískali žádné řešení soustavy, musí se chodci pohybovat stejným směrem a stejnou rychlostí, ale z různých počátečních poloh.

Funkce – exponenciální funkce

Kyselá chemie!

Mirek Kubera

Výstup RVP: žák načrtne grafy požadovaných funkcí, formuluje a zdůvodňuje vlastnosti studovaných funkcí, modeluje závislosti reálných dějů pomocí známých funkcí

Klíčová slova: exponenciální funkce, exponenciála, graf funkce, průsečík

Laboratorní práce

Doba na přípravu:

10 min

Doba na provedení:

45 min

Obtížnost:

nízká

Úkol Studujte křivku, která vznikne, jestliže budete měřit pH kyselého roztoku a pomocí tablety proti překyselení se jej budete snažit neutralizovat. Popište tuto křivku matematickým vztahem.

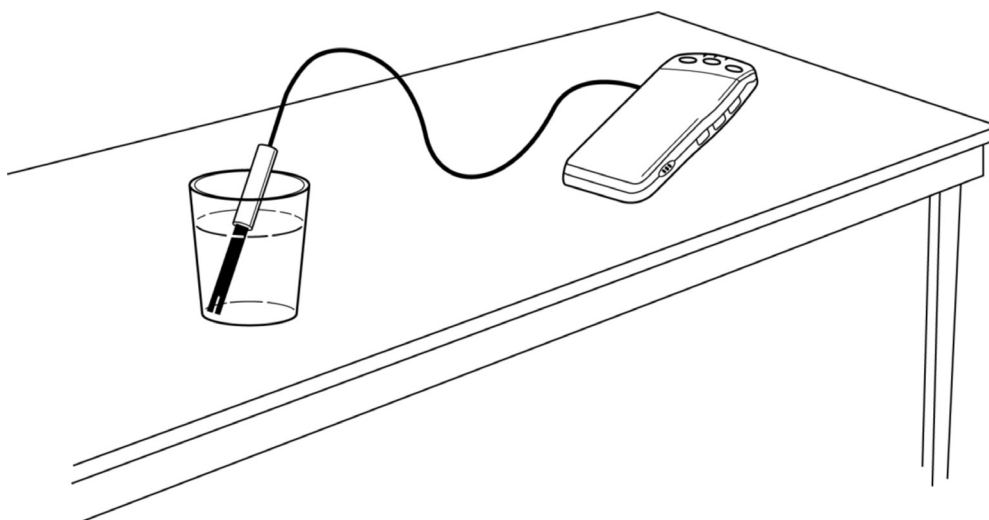
Pomůcky Počítač s programem Logger Pro, LabQuest, čidlo pH, sklenice vody pokojové teploty, šumivé tablety proti překyselení žaludku, citrónová šťáva, oční kapátko, destilovaná voda, ochranné brýle

Teoretický úvod V chemii definujeme kyselost nebo zásaditost určitého roztoku měřením jeho pH na stupnici od 0 do 14. Neutrální roztok má pH 7. Hodnota pH menší než 7 znamená kyselý roztok, zatímco hodnota pH větší než 7 znamená, že roztok je zásaditý.

Acidobazická rovnováha lidského těla je dynamická rovnováha kyselin a zásad uvnitř všech tekutin a buněk lidské organismu. Náš organismus lépe funguje, pokud je lehce zásaditý, jenže některé životní funkce, jako například trávení, vytvářejí prostředí kyselé.

Velmi vysoká nebo nízká hodnota pH vedou k nepohodě a podráždění. Například zažívací potíže nebo podrážděný žaludek obvykle ukazují na přítomnost velkého množství žaludečních kyselin. To můžeme částečně zlepšit tím, že si vezmeme tabletu nebo nápoj proti překyselení žaludku. Tyto prostředky jsou určeny k tomu, aby neutralizovaly kyseliny a zvýšily úroveň pH v žaludku.

V tomto experimentu budeme simulovat podmínky v lidském žaludku tím, že do vody přidáme několik kapek citrónové šťávy. Účinek tablety bude měřen pomocí čidla pH. Na závěr budeme modelovat naměřená data pomocí vhodné matematické funkce.



- Vypracování**
1. Zapojte senzor pH do LabQuestu, který propojíte kabelem USB s počítačem. Spusťte program Logger Pro a nastavte měření: zvolte dobu měření 50 s nebo 100 s (podle použitého prostředku).
 2. Nasadte si ochranné brýle. Do sklenice nalijte 125 ml vody. Sklenice musí být velmi čistá, aby měření nebylo ovlivněno.
 3. Vyjměte čidlo ze skladovacího roztoku chránícího čidlo pH před vyschnutím a propláchněte konec senzoru pH destilovanou vodou.

Kyselá chemie!

- Umístěte senzor pH do sklenice s vodou a upevněte jej, aby nemohlo dojít k převržení nádoby.
- Očním kapátkem umístěte do vody ve sklenici 20 kapek citrónové šťávy. Lehce zamíchejte senzorem pH.
- Vhodte do roztoku připravenou tabletu proti překyselení a spusťte **Sběr dat**.
- Hodnota pH se bude nejprve rychle zvyšovat, později již jen velmi pomalu. Poradte se s učitelem, zda naměřená data uložit, nebo experiment zopakovat.

Analýza dat

- Naměřená data můžete modelovat pomocí exponenciální funkce, kterou zapíšeme ve tvaru $y = A \cdot (1 - B^x) + C$. V tomto výrazu y značí pH roztoku a x je čas. Konstanta C vyjadřuje původní pH roztoku a také průsečík s osou y . A odpovídá celkové změně hodnoty pH a B je hodnota mezi 0 a 1, která měří rychlost změny.
- Pro nalezení modelu naměřené funkce nejprve z grafu určete průsečík funkce s osou y . Zvolte funkci **Analýza** → **Odečet hodnot** a posuňte kurzor v grafu až do hodnoty $x = 0$. Zapište hodnotu C na dvě desetinná místa.
- Na druhé straně grafu se hodnota pH blíží určité, takřka konstantní hodnotě. Posuňte kurzor zcela vpravo a určete hodnotu pH, ke které se křivka blíží.
- Hodnota, kterou jste právě určili, je součet konstant v tomto modelu. Předpokládejme, že $0 < B < 1$. Jestliže x nabývá velké hodnoty, hodnota naší hledané funkce se blíží $A + C$. Vysvětlete, proč se blíží zrovna tomuto součtu.
- Z předchozích odečtů určete hodnotu konstanty A .
- Zakreslete graf nalezené funkce:
 - Klikněte do oblasti grafu a učiňte jej aktivním.
 - Vyberte **Analýza** → **Proložit křivku**. Zvolte **Manuální aproximace** a **Definovat funkci**. Zapište rovnici hledané funkce $A \cdot (1 - B^x) + C$.
 - Zadejte již nalezené hodnoty A a C .
 - Pro nalezení hodnoty B postupujte následovně: zadejte hodnotu 0,5 a podívejte se v náhledu, jak daná funkce vypadá, zda prochází naměřenými body, nebo ne. Pomocí šipek nahoru a dolů vyberte nejvhodnější hodnotu konstanty B . Tuto hodnotu si zapište do tabulky a potvrďte vytvoření grafu.

průsečík s osou y (C)	
hodnota dosaženého pH	
hodnota A	
nejlepší hodnota B	

- Jak ovlivňuje hodnota konstanty B tvar modelované křivky?
- Jak ovlivní větší množství kapek citrónové šťávy přidanych na začátku experimentu do vody výsledný graf závislosti pH na čase? Které z koeficientů proložené křivky se změní a proč?
- Jak ovlivní výsledný graf závislosti pH na čase dvě přidané tablety pro odkyselení žaludku? Které z koeficientů proložené křivky se změní? Vysvětlete svou úvahu.
- Jak bychom mohli porovnat účinnost dvou různých tablet proti překyselení žaludku? Které z parametrů A , B nebo C v modelové funkci ukazují, jak dobře tableta působí?

Kyselá chemie!

Mirek Kubera

Tableta proti překyselení žaludku musí obsahovat jedlou sodu. Některé tablety se špatně rozpouštějí ve vodě, a proto jsou pro tuto aktivitu méně vhodné. Vyzkoušejte vhodnost tablet, než je budete používat se třídou.

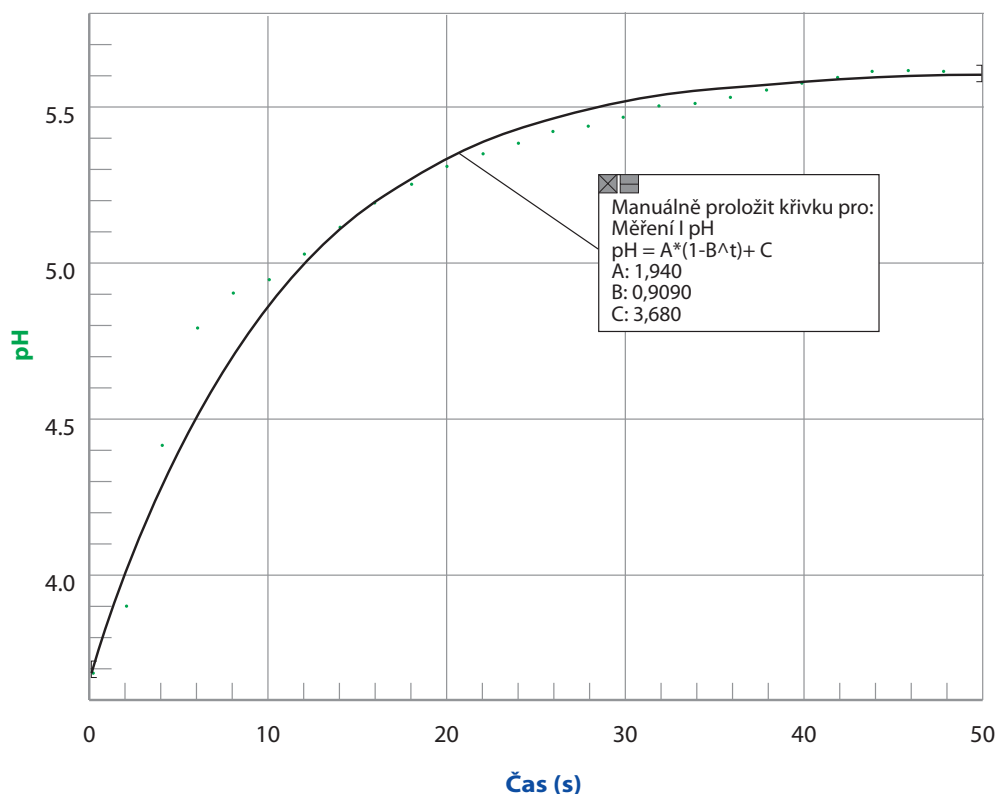
Destilovaná voda je vhodnější než voda z kohoutku. Voda z kohoutku může mít sama o sobě pH různé od neutrální hodnoty 7 (i destilovaná voda může obsahovat rozpuštěné plyny, a její pH je tím ovlivněno). Použijte vodu pokojové teploty.

Použijte čistou sklenici.

Po ukončení měření nezapomeňte propláchnout senzor pH destilovanou vodou a uložit ho do skladovacího roztoku.

Zpracování Na následujícím obrázku si můžete udělat představu o výsledcích experimentu.

**Změna pH
při
odkyselování**



**Výsledky
měření**

průsečík s osou y (C)	3,68
hodnota dosaženého pH	5,62
hodnota A	1,94
nejlepší hodnota B	0,909

- Odpovědi na otázky**
4. Jestliže $0 < B < 1$, pak pro velkou hodnotu x (času) nabývá B^x nulové hodnoty, tudíž $y = A \cdot (1 - 0) + C = A + C$.
 5. Hodnota konstanty A = největší hodnota $\text{pH} - C$.
 7. Větší hodnota B znamená pomalejší vzestup pH .
 8. Přidáním většího počtu kapek citrónové šťávy do vody na začátku experimentu způsobí větší kyselost původního roztoku, a tudíž i nižší pH . Protože konstanta C vyjadřuje hodnotu pH roztoku na začátku, bude mít tedy nižší hodnotu. Hodnota konstanty A může a nemusí být nižší, protože výsledná hodnota pH může být stejná, nebo může být nižší.
 9. Přidání několika tablet by mělo způsobit rychlejší nárůst pH , takže hodnota konstanty B bude nižší.
 10. Dobrá tableta proti překyselení žaludku bude rychlá (s malou hodnotou B). Dobrá tableta také zajistí, že výsledná hodnota pH se bude nacházet v komfortním rozsahu, že nebude nižší než určitá minimální požadovaná hodnota a také nebude vyšší než určitá maximální požadovaná hodnota.

Tik tak

Mirek Kubera

- Výstup RVP:** žák načrtne grafy elementárních funkcí a určí jejich vlastnosti, při konstrukci grafů aplikuje znalosti o zobrazeních, formuluje a zdůvodňuje vlastnosti studovaných funkcí, aplikuje vztahy mezi hodnotami goniometrických funkcí a vztahy mezi těmito funkcemi
- Klíčová slova:** goniometrické funkce, sinus, kosinus, amplituda, perioda, posunutí ve směru osy x , posunutí ve směru osy y , úhlová frekvence, derivace, poloha, rychlost

Laboratorní práce

Doba na přípravu:

5 min

Doba na provedení:

45 min

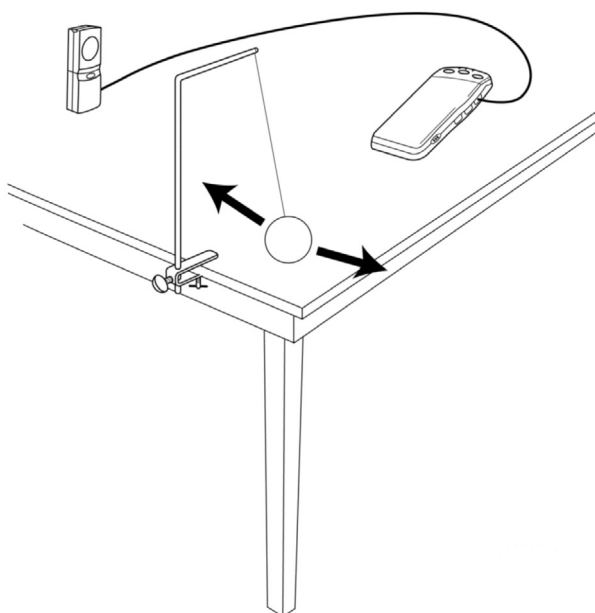
Obtížnost:

nízká

- Úkol**
- 1) Změřte závislost polohy pohybujícího se kyvadla na čase.
 - 2) Určete periodu kmitů kyvadla.
 - 3) Porovnejte graf naměřené závislosti s grafem funkce kosinus.

Pomůcky Počítač s programem Logger Pro, sonar Go!Motion, kyvadlo délky 80 cm, stojan, dlouhé pravítko či metr

Teoretický úvod Pohyb kyvadla fascinoval lidstvo dlouhou dobu. Galileo pozoroval pohupující se svícen a srovnával jeho pohyb se svým pulsem. V roce 1851 Jean Foucault pomocí dlouhého kyvadla prokázal rotaci Země. Kyvadlo se pohybuje stále ve stejné rovině, zatímco Země pod ním se otáčí.



- Vypracování**
- 1) Zavěste kyvadlo na pevný stativ a umístěte sonar Go!Motion přibližně do vzdálenosti 50 cm od rovnovážné polohy kyvadla.
 - 2) Zapojte sonar Go!Motion do počítače a spusťte program Logger Pro.
 - 3) Změřte vzdálenost mezi kyvadlem ve svislé poloze a sonarem. Zapište tuto vzdálenost D do připravené tabulky.
 - 4) Umístěte metr pod kyvadlo. Jeho počátek musí být pod kyvadlem, které je v rovnovážné poloze (svislý závěs). Určete, jak daleko budete kyvadlo vychylovat při uvedení do pohybu. Tato vzdálenost by měla být alespoň 20 cm. Zapište tuto hodnotu do tabulky jako amplitudu A .
 - 5) Uvedte kyvadlo do pohybu a pomocí stopky změřte periodu jeho pohybu. Perioda je doba potřebná k tomu, aby se kyvadlo při svém pohybu vrátilo do původní polohy a pohyb se začal opakovat. Změřte desetinásobek periody a zapište tuto hodnotu do tabulky.

Tik tak

- 6) Jestliže se kyvadlo pohybuje pravidelně, spusťte **Sběr dat**. Měření bude probíhat po dobu pěti sekund.
- 7) Získaný graf závislosti vzdálenosti na čase by měl mít průběh podobný funkci kosinus. Jestliže máte pochybnosti o správnosti naměřených dat, poradte se se svým učitelem.

Analýza dat

- 1) Budete porovnávat naměřená data s průběhem funkce $y = A \cos(B(x - C)) + D$. Hodnoty změřené při nastavování experimentu, stejně jako naměřená data, vám umožní určit parametry A, B, C i D.
- 2) Klikněte do oblasti grafu a učiňte ho aktivním. Vyberte funkci **Analýza** → **Odečet hodnot** a určete hodnotu parametru C. Tato hodnota představuje posunutí křivky ve směru osy x oproti základní funkci kosinus. Základní kosinus má pro $x = 0$ maximální hodnotu. Určete tedy čas, ve kterém je naše naměřená křivka maximální. Tuto hodnotu запиšte do tabulky jako C.
- 3) Máte změřen desetinásobek periody T . Vypočítejte tedy hodnotu jedné periody T . Zapište ji do tabulky.
- 4) Parametr B se nazývá úhlová frekvence a vyjadřuje počet opakování, které funkce vykoná během doby 2π sekund. Vypočítejte hodnotu $B = \frac{2\pi}{T}$ a zapište ji do tabulky.

Tabulka naměřených hodnot

A (m)	
B (s ⁻¹)	
C (s)	
D (m)	
10·T (s)	
T (s)	

- 5) Nyní můžete vytvořit graf naměřené funkce. Vyberte **Analýza** → **Proložit křivku....** Vyberte **Manuální aproximace** a zadejte nově definovanou funkci $A \cdot \cos(B \cdot (t - C)) + D$. Zadejte hodnoty parametrů A, B, C a D z tabulky.
 - a) Hodnota A je rovna amplitudě pohybu kyvadla.
 - b) Hodnota B je rovna úhlové frekvenci kyvadla.
 - c) Hodnota C je rovna hodnotě posunutí křivky ve vodorovném směru (čas).
 - d) Hodnota D je rovna hodnotě posunutí křivky ve směru osy y (vzdálenost od sonaru).
- 6) Jak dobře tato funkce prochází naměřenými daty? Jestliže proložení odpovídá naměřeným datům, zapište si vloženou rovnici a odpovídejte na další otázky. Jestliže křivka neodpovídá naměřeným datům, pokuste se parametry změnit tak, aby křivka procházela naměřenými daty. Diskutujte se svými spolužáky a učitelem, jaký vliv na proloženou křivku má který parametr. Výsledek opět zapište a pokračujte odpovědí na další otázky.

**Úkoly pro
zvědavé**

- 1) Jak by se změnily parametry A , B , C a D , jestliže bychom se pokusili modelovat tuto periodickou funkci funkcí $y = A \sin(B(x - C)) + D$ místo funkcí kosinus? Napište svou předpověď a každou z hodnot zdůvodněte.
- 2) Ověřte svou předpověď změnou modelu. Proložte naměřená data funkcí sinus charakterizovanou novými koeficienty A , B , C a D . Prochází tato funkce naměřenými daty? Pokud ne, proč? Opravte model tak, aby jimi procházela.
- 3) Jaký je význam jednotlivých koeficientů A , B , C a D z modelu pohybu kyvadla ve tvaru $y = A \cos(B(x - C)) + D$? Upřesněte.
- 4) Máte před sebou graf závislosti polohy kyvadla na čase. Zkuste spočítat derivaci této funkce. Vyberte **Data** → **Nový dopočítávaný sloupec**. Zadejte název a označení funkce této nové funkce (např. derivace, D1), případně její jednotku (zde m/s). V poli pro rovnici nového sloupce zadejte **derivace(„vzdálenost“)**. Získáte tak graf závislosti rychlosti kyvadla na čase. Jaká je souvislost obou studovaných závislostí? Kdy je rychlost kyvadla nulová? Kdy je rychlost kyvadla maximální? K odpovědi na tyto otázky si můžete vytvořit graf znázorňující obě funkce v závislosti na čase zároveň.

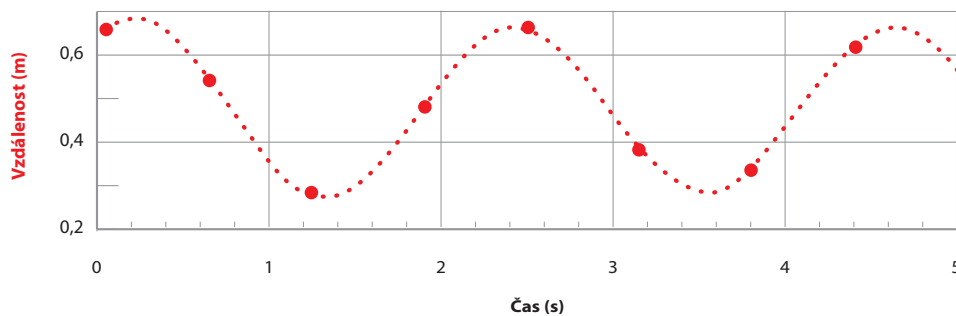
Tik tak

Mirek Kubera

Při této práci si žáci uvědomí a sami přijdou na význam pojmů amplituda, perioda a počáteční poloha kyvadla. Hodnoty těchto veličin sice můžeme snadno získat z naměřeného grafu, dáváme však přednost přímému nezávislému měření běžnými pomůckami (metr, stopky).

Závaží kyvadla by mělo být z tvrdého materiálu, aby nedocházelo k pohlcování a špatnému odrazu ultrazvukových vln. Míček o velikosti 5 cm je docela vhodný.

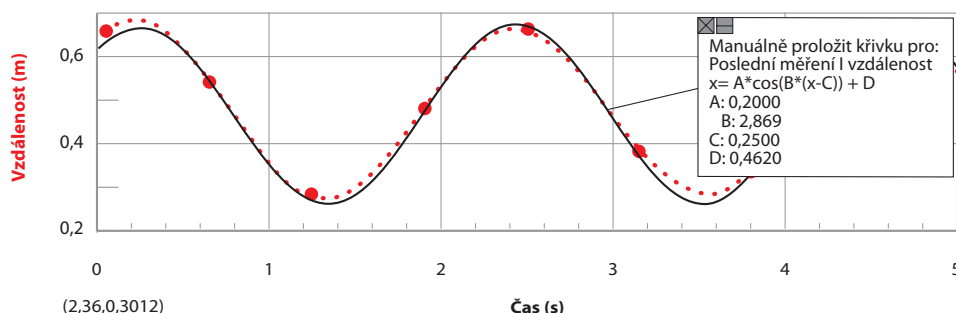
**Ukázka
naměřených
hodnot**



**Tabulka
naměřených
hodnot**

A (m)	0,20
B (s ⁻¹)	$\frac{2\pi}{T} = 2,87$
C (s)	0,25
D (m)	$\frac{0,653 + 0,271}{2} = 0,462$
10 · T (s)	21,9
T (s)	2,19

Jestliže zapíšeme získané hodnoty do tabulky upravující prokládanou funkci, získáme následující graf.



Vidíme, že proložená křivka prochází naměřenými daty. Rovnice této funkce je $y = 0,20 \cos(2,87(t - 0,25)) + 0,462$.

První parametr A = 0,20 m má význam amplitudy. Tato hodnota je různá od počáteční polohy kyvadla, protože měření začínáme v libovolný okamžik pohybu kyvadla.

Parametr B má význam úhlové frekvence pohybu kyvadla.

Hodnota C je posunutí grafu funkce kosinus ve směru osy x (tedy času). Odpovídá času, ve kterém graf funkce nabývá maximální hodnoty.

Posledním parametrem je posunutí grafu ve směru osy y. Funkce kosinus nabývá kladných a záporných hodnot, její střední hodnota je rovna nule. Naše funkce nabývá hodnot



Tik tak

od 0,271 m do 0,653 m. Jako střední hodnotu, kolem které kmitá náš oscilátor, tedy vezmeme aritmetický průměr hodnot krajních. Výsledek je $D = 0,462$ m.

- Zpracování dat** 1) Jak by se změnily parametry A, B, C a D, jestliže bychom se pokusili modelovat tuto periodickou funkci funkcí $y = A \sin(B(x - C)) + D$ místo funkcí kosinus? Napište svou předpověď a každou z hodnot zdůvodněte.

Odpověď: Jestliže použijeme funkci sinus, změní se pouze parametr C. Ostatní parametry zůstávají shodné s předchozím modelem. Amplituda funkce sinus a kosinus je shodná. $A = 0,20$ m. Hodnota B neboli úhlová frekvence se opět nemění, protože i funkce sinus a kosinus mají stejné periody, tudíž i úhlové frekvence. Posunutí funkcí ve směru osy y musí být opět stejné, protože popisují stejný jev. Pouze parametr C, tedy posun v čase, má jinou hodnotu. Funkce sinus a kosinus jsou vůči sobě posunuty o čtvrtinu periody, v našem případě je $T = 2,19$ s, čtvrtina tedy odpovídá 0,548 s. Funkce sinus se oproti funkci kosinus zpožďuje, musíme tedy od hodnoty $C_{\cos} = 0,25$ s hodnotu 0,548 s odečíst. Dostáváme hodnotu $C_{\sin} = -0,298$ s.

- 2) Ověřte svou odpověď změnou modelu. Proložte naměřená data funkcí sinus charakterizovanou novými koeficienty A, B, C a D. Prochází tato funkce naměřenými daty? Pokud ne, proč? Opravte model tak, aby jimi procházela.

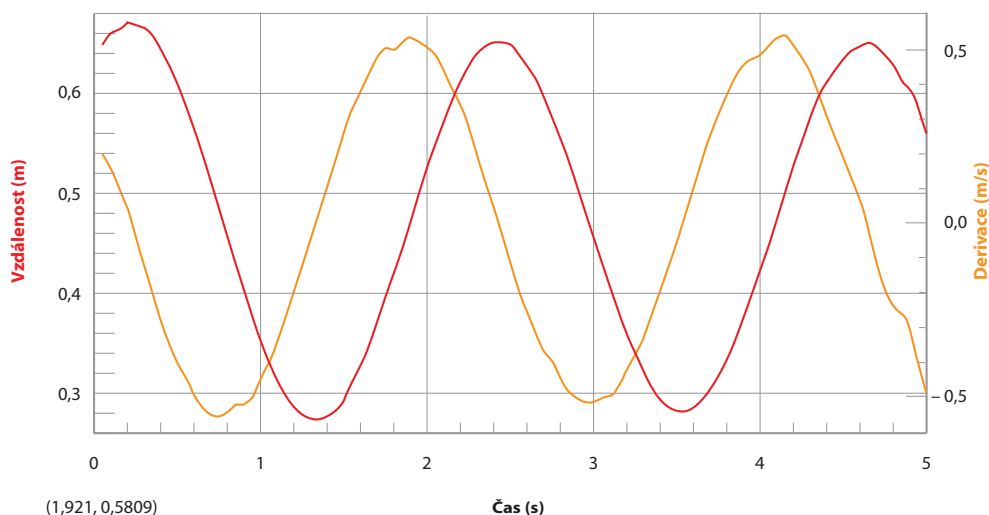
Odpověď: Funkce $y = 0,20 \sin(2,87(t - 0,298)) + 0,462$ zcela odpovídá naměřeným bodům a kopíruje původně proloženou funkci kosinus.

- 3) Opět napište, jaký je význam jednotlivých koeficientů A, B, C a D z modelu pohybu kyvadla ve tvaru $y = A \cos(B(x - C)) + D$.

Odpověď: Význam koeficientů byl osvětlen v předchozím textu.

- 4) Máte před sebou graf závislosti polohy kyvadla na čase. Zkuste spočítat derivaci této funkce. Vyberte **Data** → **Nový dopočítávaný sloupec**. Získáte tak graf závislosti rychlosti kyvadla na čase. Jaká je souvislost obou studovaných závislostí? Kdy je rychlost kyvadla nulová? Kdy je rychlost kyvadla maximální? K odpovědi na tyto otázky si můžete vytvořit graf znázorňující obě funkce v závislosti na čase zároveň.

Odpověď: Jestliže zobrazíme do jednoho grafu obě funkce, tedy vzdálenost a její derivaci v závislosti na čase, získáme následující graf. Červená křivka znázorňuje vzdálenost kyvadla, oranžová pak její derivaci neboli rychlost pohybu kyvadla.



Pro lepší odečítání v něm byla znázorněna ještě vedlejší mřížka.

Obě funkce spolu zcela zřetelně souvisejí. Obě jsou periodické a mají shodnou periodu. Když jedna z nich nabývá své maximální hodnoty, druhá prochází svou střední hodnotou, a obráceně. Stejně se chovají i funkce sinus a kosinus, nebo právě funkce kosinus a její derivace.

Rychlost kyvadla je tedy maximální v okamžiku, když prochází rovnovážnou polohou, a naopak nulová, když se kyvadlo nachází ve své krajní poloze charakterizované svou maximální výchylkou. Je jedno, zda vpravo nebo vlevo od rovnovážné polohy.

Odtud potud!

Mirek Kubera

Výstup RVP: žák řeší analyticky polohové a metrické úlohy o lineárních útvech v rovině a prostoru

Klíčová slova: souřadnice, vzdálenost dvou bodů, Pythagorova věta

Laboratorní práce

Doba na přípravu:

5 min

Doba na provedení:

45 min

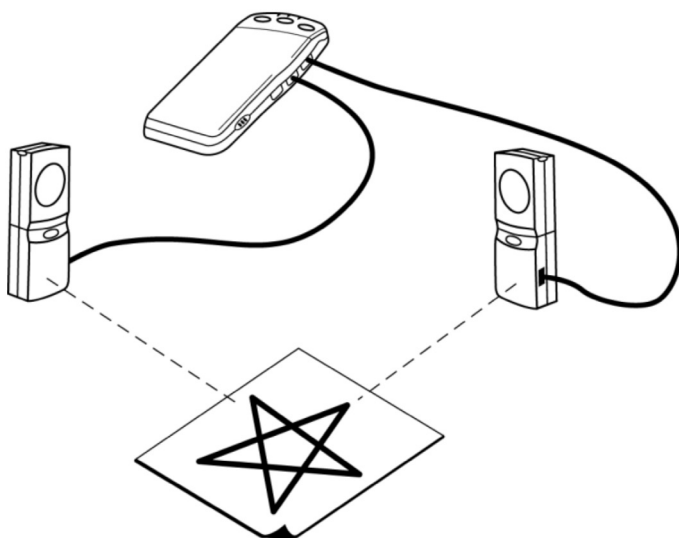
Obtížnost:

střední

- Úkol**
- 1) Změřte souřadnice pohybující se tyče.
 - 2) Použijte změřené hodnoty k výpočtu vzdáleností jednotlivých konců hvězdy.
 - 3) Porovnejte vypočtené a skutečně změřené vzdálenosti na obrazci.

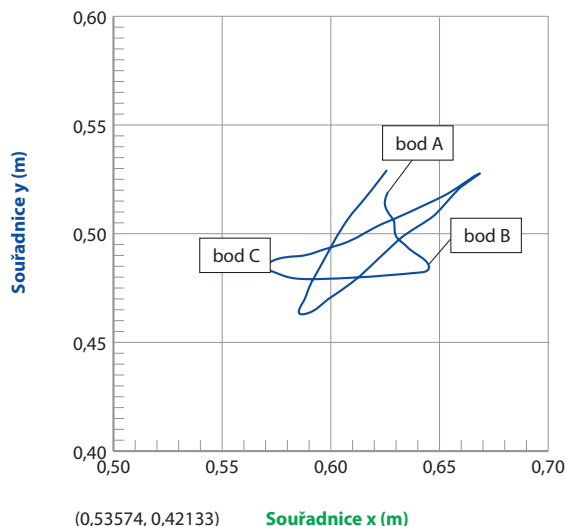
Pomůcky Počítač s programem Logger Pro, dva sonary Go!Motion, obrazec hvězdy na papíru A4, dlouhé pravítko či metr, tyč pro snímání polohy sonarem

Teoretický úvod Řada problémů, se kterými se setkáme v aplikované matematice, v sobě obsahuje hledání vzdáleností mezi dvěma body. Jestliže známe souřadnice těchto bodů, značené $[x_1; y_1]$ a $[x_2; y_2]$, je poměrně snadné vypočítat tuto vzdálenost. Použijeme vztah vycházející z Pythagorovy věty $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. V tomto experimentu budeme souřadnice x a y měřit pomocí dvou sonarů a z naměřených dat ověříme platnost teoretického vztahu.



- Vypracování**
- 1) Umístěte obrazec hvězdy na stůl nebo na zem tak, aby se nemohl v průběhu měření posunout.
 - 2) Sonary umístěte do vzdálenosti přibližně 50 cm jak je znázorněno na obrázku. Poznamenejte si, který sonar zaznamenává souřadnici x a který y . Oba by měly zaznamenávat polohu tyče kdekoli v obrazci hvězdy.
 - 3) Sonary spojte s počítačem a nastavte měření. Tabulku můžete zcela odebrat. Nechte si zobrazit pouze dva grafy souřadnic x a y v závislosti na čase. Jako další graf vložte závislost souřadnice y na souřadnici x . Vyberte **Vložit** → **Graf** a na osách zvolte vhodnou veličinu.
 - 4) Vyzkoušejte si pohyb tyče po obrazci hvězdy a poté jej proměřte. Pokud se měření nepovedlo, můžete jej ihned opakovat. Třetí graf by měl znázorňovat hvězdu. Pokud tomu tak není, zvolte čtvercový formát grafu nebo měření zopakujte.

Odtud potud!



- Analýza dat**
- 1) Posledně vložený graf zobrazuje závislost vzdáleností měřených od obou sonarů. Jde tedy o souřadnice x a y jednotlivých bodů tvořících hvězdu. Nejprve musíte určit souřadnice vrcholů hvězdy. Klikněte kamkoliv do oblasti grafu a učiňte jej aktivním. Vyberte ikonku **Odečet** a postupně určete souřadnice všech vrcholů hvězdy. Zapište je do následující tabulky.

**Tabulka
naměřených
hodnot**

bod	souřadnice x	souřadnice y
A		
B		
C		
D		
E		

- 2) Změřte vzdálenost bodu A od sonaru měřícího souřadnici x. Porovnejte ji se souřadnicí x tohoto bodu. Odpovídají si? Jaký je tedy význam souřadnice x a souřadnice y?
- 3) Obrazec hvězdy je tvořen pěti rovnými čarami stejné délky. Protože již známe souřadnice všech vrcholů, vypočítejte vzdálenosti po sobě jdoucích vrcholů. Použijte vztah $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ a výsledky zapište do tabulky. Vypočítané hodnoty zaokrouhlete na 1 mm.
- 4) Tyto vzdálenosti změřte pravítkem. Naměřené hodnoty zaokrouhlete na 1 mm a zapište do tabulky.
- 5) Porovnejte vypočítané a změřené hodnoty. Která z metod je podle vás přesnější a proč?

úsek	délka vypočítaná	délka naměřená
AB		
BC		
CD		
DE		
EA		

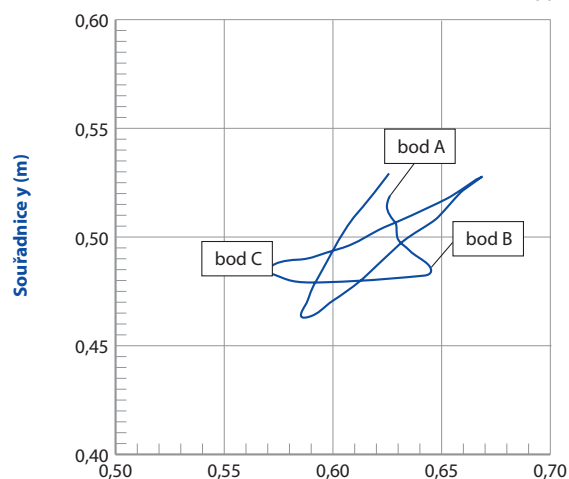
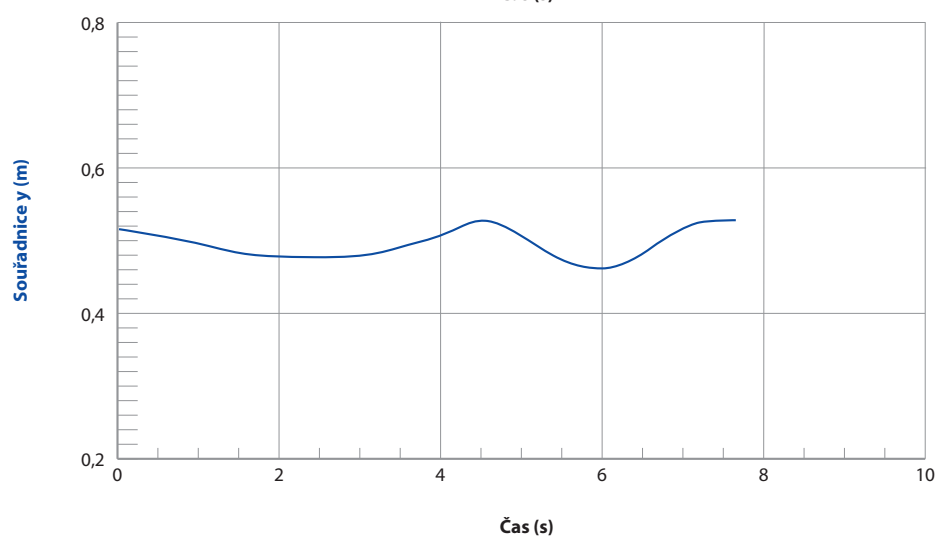
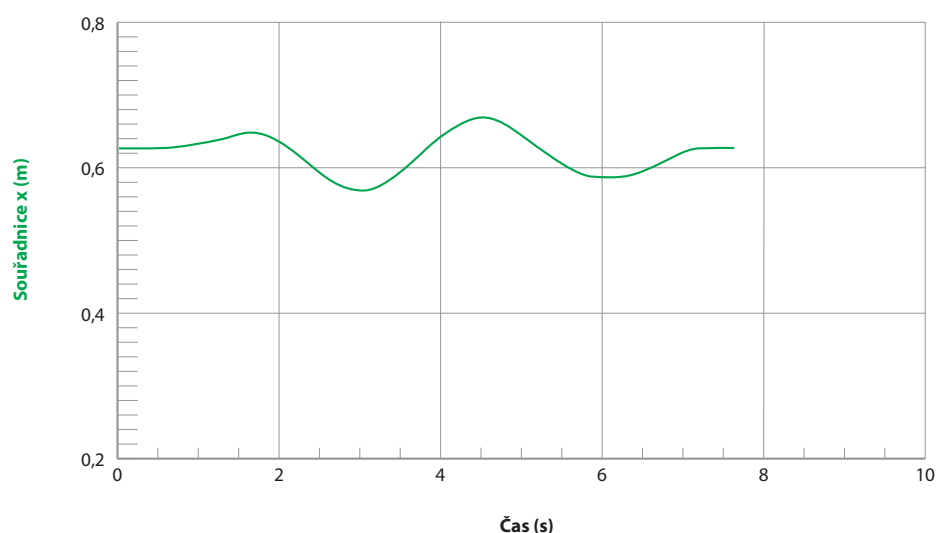
Analytická geometrie lineárních útvarů

Odtud potud!

Mirek Kubera

Pro vlastní měření použijte dřevěnou nebo plastovou tyčku, která má alespoň 1 cm v průměru. Použijete-li menší, mohou být naměřená data ovlivněna mnoha chybami. Dejte pozor na to, aby sonary byly umístěny paralelně se stranami papíru A4, na kterém je vytištěna hvězda.

**Ukázka
naměřených
hodnot**



(0,53574, 0,42133)

Souřadnice x (m)

Odtud potud!

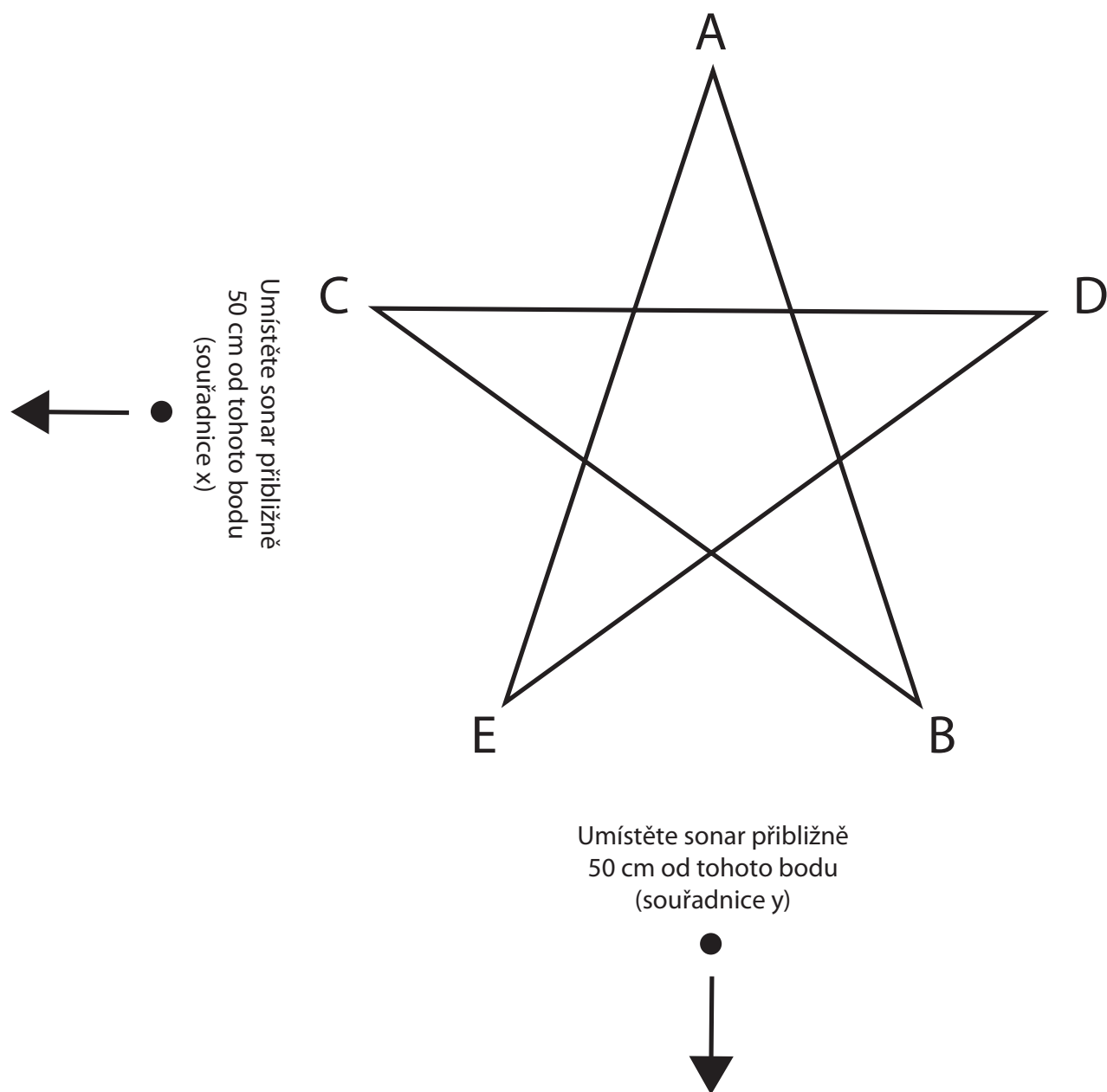
**Tabulka
naměřených
hodnot**

bod	souřadnice x	souřadnice y
A	0,626	0,518
B	0,645	0,484
C	0,568	0,485
D	0,669	0,528
E	0,586	0,464

úsek	délka vypočítaná	délka naměřená
AB	0,039	0,105
BC	0,077	0,105
CD	0,110	0,105
DE	0,105	0,105
EA	0,067	0,105

- Zpracování dat**
- 2) Při porovnávání souřadnice bodu A a vzdálenosti tohoto bodu od sonaru si uvědomujeme, že sonar měří vzdálenost tohoto bodu od sebe samého.
 - 3) Naměřené a vypočítané hodnoty se poměrně dost liší. Ve dvou případech se docela dobře shodují, zatímco v ostatních nabývají zcela jiných hodnot. Přímé měření je samozřejmě lepší metodou, protože není ovlivněno pohybem tyče, jejím tvarem a dalšími možnými chybami při realizaci experimentu využívajícího odraz ultrazvukových vln.

Příloha



Jak předměty chladnou?

Mirek Kubera

Výstup RVP: žák načrtne grafy elementárních funkcí a určí jejich vlastnosti, využije poznatky o funkcích při řešení rovnic a nerovnic, aplikuje vztahy mezi hodnotami exponenciálních, logaritmických a goniometrických funkcí a vztahy mezi těmito funkcemi, modeluje závislosti reálných dějů pomocí známých funkcí

Klíčová slova: exponenciální funkce, ochlazování, počáteční teplota, výsledná teplota

Laboratorní práce

Doba na přípravu:

5 min

Doba na provedení:

45 min

Obtížnost:

střední

- Úkol**
- 1) Změřte postupné ochlazování teploměru po jeho vynětí z horké lázně.
 - 2) Naměřená data modelujte a porovnejte s grafem exponenciální funkce.

Pomůcky Počítač s programem Logger Pro, teploměr USB Go!Temp, kádinka, teplá voda

Teoretický úvod Když před sebou máte horký nápoj, víte, že se bude postupně ochlazovat. Newtonův zákon o chladnutí nám poskytuje matematický model tohoto přenosu tepla. Tento zákon říká, že teplotní rozdíl mezi teplotou předmětu (teplota T) a teplotou jeho okolí (teplota $T_{\text{okolí}}$) klesá exponenciálně s časem.

$$T - T_{\text{okolí}} = T_0 \cdot e^{-kt}$$

V tomto vztahu T_0 označuje rozdíl počáteční teploty tělesa T a teploty okolí $T_{\text{okolí}}$ předmětu na začátku experimentu, k je kladná konstanta a t je čas.

V tomto experimentu změříte teplotu samotného teploměru po jeho vynětí z nádoby s horkou vodou. Naměřená data zkusíte modelovat různými matematickými funkcemi.

Vypracování Zapojte USB teploměr do počítače. Spusťte program Logger Pro. Vezměte kádinku nebo sklenici vody 45–55 °C teplé a vložte do ní čidlo USB teploměru na dobu přibližně 30 s, aby se prohřálo. Nemusíte proměřovat ochlazování vody ve sklenici, to by trvalo příliš dlouho. Postačí, když budete studovat ochlazování samotného teploměru.

Vyndejte teploměr z vody, položte ho na kraj stolu a okamžitě zahajte měření spuštěním **Sběru dat**. Měření bude trvat po dobu 180 s.

Po ukončení měření z grafu odečtete (**Odečet hodnot**) počáteční a konečnou teplotu teploměru. Konečná teplota by měla odpovídat teplotě prostředí (pokojová teplota) nebo být lehce nad ní. Hodnoty zapište do následující tabulky:

počáteční teplota (°C) ... t_1	
konečná teplota (°C) ... t_2	
rozdíl teplot: počáteční – konečná (°C) ... $T_0 = t_1 - t_2$	

Doplňte následující tabulku:

manuální proložení		
$T - T_{\text{okolí}} = T_0 \cdot e^{-kt}$	T_0	
	k	
	$T_{\text{okolí}}$	
automatické proložení		
$y = A \cdot \exp(-C \cdot x) + B$	A	
	C	
	B	

Jak předměty chladnou?

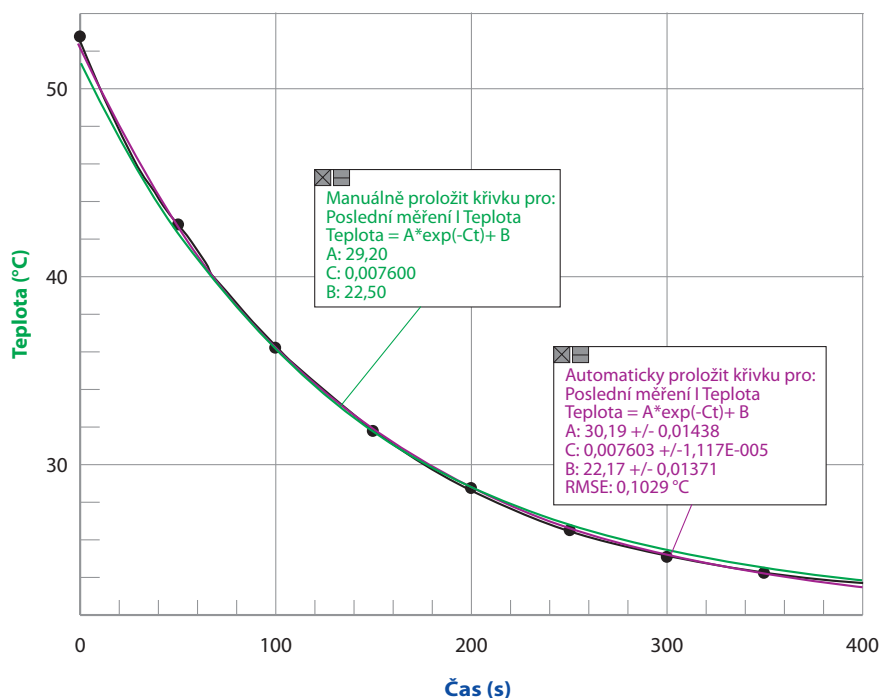
- Analýza dat**
- 1) Mohli bychom naměřená data proložit klesající exponenciální funkcí? Jak? Jinou funkcí než základní ve tvaru $y = A \cdot e^{-bx}$?
 - 2) Protože se v Newtonově modelu ochlazování hovoří o rozdílu teploty horkého tělesa a jeho okolí $T - T_{\text{okolí}} = T_0 \cdot e^{-kt}$, můžeme tuto rovnici přepsat na tvar $T = T_0 \cdot e^{-kt} + T_{\text{okolí}}$. Program Logger Pro obsahuje vlastní exponenciální proložení ve tvaru $y = A \cdot \exp(-C \cdot x) + B$. Porovnejte tento výraz s výrazem $T = T_0 \cdot e^{-kt} + T_{\text{okolí}}$ a určete, čemu jsou rovny konstanty A, B a C.
 - 3) Jestliže jste našli hodnoty počáteční a konečné (pokojové) teploty, můžete se pokusit proložit naměřená data odpovídající funkcí a nalézt hodnotu koeficientu k .
 - 4) Zvolte **Analýza** → **Proložit křivku...**. Vyberte **Přirozenou exponenciálu** a **Manuální proložení**. Zadejte hodnoty koeficientů A a B. Hodnota B se bude blížit pokojové teplotě v místě experimentu. Zadání koeficientu C zkoušejte postupně tak dlouho, než proložená křivka bude pěkně procházet naměřenými daty.
 - 5) Rovnici proložené funkce napište a poté ji převeďte do původního tvaru (Newtonův zákon).
 - 6) Tuto funkci můžete také zkusit proložit **Automaticky**. Odpovídá naměřeným datům?
 - 7) Jestliže $t = 0$ s, jaká je hodnota výrazu e^{-kt} ?
 - 8) Jestliže je t velmi velké, jaká je hodnota teplotního rozdílu $T - T_{\text{okolí}}$? Jaká je teplota měřená teploměrem v takovém okamžiku?
 - 9) Co musíte změnit v realizaci experimentu, jestliže chcete zmenšit hodnotu parametru k v dalším měření? Jakou veličinu představuje hodnota k ?
 - 10) Z rovnice proložené funkce určete čas, za který se teplotní čidlo ochladí na teplotu o 1 °C vyšší, než je pokojová teplota.
 - 11) Jestliže je počáteční rozdíl teplot poloviční proti předchozímu měření, bude také trvat polovinu času ochlazování na teplotu o 1 °C vyšší, než je teplota pokojová?

Jak předměty chladnou?

Mirek Kubera

Zpracování Pokud potřebujete úlohu trochu zkrátit, můžete žákům říci, aby teploměr třeli prsty, a tím ho zahřáli. Počáteční teplota sice bude nižší, ale jinak bude vše fungovat naprosto stejně. Počítejte ale s tím, že studenti začnou provádět vylomeniny. Měření je nutné začít chvilku poté, co se teploměr začne ochlazovat. Můžete ho tedy zahřát na 60 °C a začít měřit teprve tehdy, když bude ukazovat teplotu kolem 50 °C.

**Ukázka
naměřených
hodnot**



počáteční teplota (°C) ... t_1	52,9
konečná teplota (°C) ... t_2	23,7
rozdíl teplot: počáteční – konečná (°C) ... $T_0 = t_1 - t_2$	29,2

manuální proložení		
$T - T_{okoli} = T_0 \cdot e^{-kt}$	T_0	29,2
	k	0,0076
	T_{okoli}	22,50
automatické proložení		
$y = A \cdot \exp(-C \cdot x) + B$	A	30,19
	C	0,0076
	B	22,17

Jak předměty chladnou?

Odpovědi na otázky 1) Mohli bychom naměřená data proložit klesající exponenciální funkcí? Jak? Jinou funkcí než základní ve tvaru $y = A \cdot e^{-bx}$?

Odpověď: Ano, naměřená data lze proložit grafem klesající exponenciální funkce. Tato funkce je ovšem posunuta ve směru osy y , která znázorňuje teplotu. Výsledná teplota se totiž blíží teplotě okolí, a nikoliv nule jako u exponenciální funkce.

2) Protože se v Newtonově modelu ochlazování hovoří o rozdílu teploty horkého tělesa a jeho okolí $T - T_{\text{okolí}} = T_0 \cdot e^{-kt}$, můžeme tuto rovnici přepsat na tvar $T = T_0 \cdot e^{-kt} + T_{\text{okolí}}$. Program Logger Pro obsahuje vlastní exponenciální proložení ve tvaru $y = A \cdot \exp(-C \cdot x) + B$. Porovnejte tento výraz s výrazem $T = T_0 \cdot e^{-kt} + T_{\text{okolí}}$ a určete, čemu jsou rovny konstanty A , B a C .

Odpověď: Konstanta A je blízká rozdílu počáteční teploty teploměru a teploty okolí. Tedy v našem případě hodnotě T_0 . Konstanta B odpovídá teplotě okolí a určuje posunutí naměřených hodnot ve směru osy y . Konstanta C charakterizuje rychlost ochlazování teploměru. Její jednotkou je s^{-1} .

5) Rovnici proložené funkce napište a poté ji převeďte do původního značení $T = T_0 \cdot e^{-kt} + T_{\text{okolí}}$ (Newtonův zákon).

Odpověď: Rovnice hledané funkce je $y = 29,2 \cdot e^{-0,0076x} + 22,5$, což můžeme přepsat pro teplotu ve tvaru $T = 29,2 \cdot e^{-0,0076t} + 22,5$ (T značí teplotu ve $^{\circ}\text{C}$ a t čas v sekundách).

6) Tuto funkci můžete také zkusit proložit Automaticky. Odpovídá naměřeným datům?

Odpověď: Ano, automatické proložení velmi dobře odpovídá naměřeným datům. Koeficienty prokládaných funkcí jsou prakticky shodné.

7) Jestliže $t = 0$ s, jaká je hodnota výrazu e^{-kt} ?

Odpověď: Pro $t = 0$ s nabývá výraz e^{-kt} hodnoty 1, neboť $e^0 = 1$.

8) Jestliže je t velmi velké, jaká je hodnota teplotního rozdílu $T - T_{\text{okolí}}$? Jaká je teplota měřená teploměrem v takovém okamžiku?

Odpověď: Pro velmi velké t je pak výraz e^{-kt} roven 0, tudíž teplotní rozdíl je nulový, $T_0 = T_{\text{okolí}}$. Po dostatečně dlouhém čase se teploměr dostane do tepelné rovnováhy se svým okolím.

9) Co musíte změnit v realizaci experimentu, jestliže chcete zmenšit hodnotu k v dalším měření? Jakou veličinu představuje hodnota k ?

Odpověď: Chceme-li změnit hodnotu k , která vyjadřuje rychlost ochlazování teploměru, můžeme například s teploměrem mávat a urychlit jeho ochlazování, nebo ho naopak obalit vrstvou izolace (papír, polystyren, vata) a jeho ochlazování zpomalit.

10) Z rovnice proložené funkce určete čas, za který se teplotní čidlo ochladí na teplotu o 1°C vyšší, než je pokojová teplota.

Odpověď: Teplota o 1°C vyšší než teplota okolí je v našem případě $23,17^{\circ}\text{C}$. Tuto hodnotu musíme dosadit do rovnice exponenciální funkce $y = 30,19 \cdot e^{-0,0076x} + 22,17$ za y a hledat x neboli čas. Řešení rovnice $23,17 = 30,19 \cdot e^{-0,0076x} + 22,17$ je po zaokrouhlení $x = 448$. Teploměr se tedy ochladí na pokojovou teplotu za 448 s.

11) Jestliže je počáteční rozdíl teplot poloviční proti předchozímu měření, bude také trvat polovinu času ochlazování na teplotu o 1°C vyšší, než je teplota pokojová?

Odpověď: Nebude. Teplotní rozdíl mezi počáteční a pokojovou teplotou je sice menší, v grafu exponenciály však můžeme vidět, že změna teploty při ochlazování teploměru je větší v počátku experimentu a značně menší v závěru. Více se ochlazuje těleso, které je hodně horké vůči svému okolí. Nelze tedy očekávat, že se ochladí na pokojovou teplotu za polovinu času.

Můžeme také provést stejný výpočet jako v předchozí otázce. Dosadíme $T_0 = 15,1^{\circ}\text{C}$ a vyjde nám $t = 357$ s.

Jen se tak trochu zhoupnout!

Mirek Kubera

Výstup RVP: žák využívá charakteristické vlastnosti kuželoseček k určení analytického vyjádření, z analytického vyjádření (z obecné nebo vrcholové rovnice) určí základní údaje kuželosečky

Klíčová slova: elipsa, průsečíky s osami, hlavní poloosa, vedlejší poloosa, rovnice elipsy

Laboratorní práce

Doba na přípravu:

5 min

Doba na provedení:

45 min

Obtížnost:

nízká

- Úkol**
- 1) Změřte závislost polohy a rychlosti na čase pro pohybující se kyvadlo.
 - 2) Vytvořte graf závislosti rychlosti na poloze kyvadla a určete rovnici elipsy, kterou jste takto vytvořili.

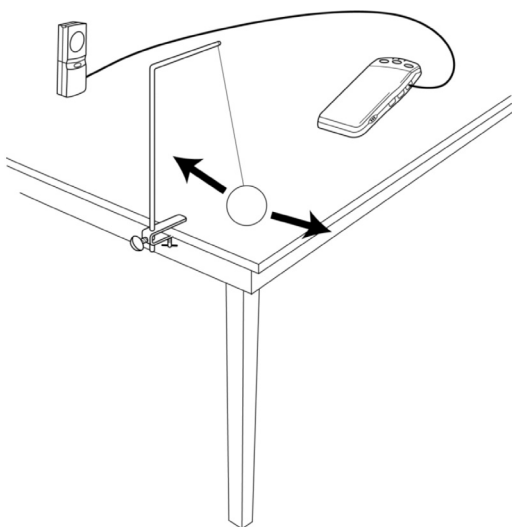
Pomůcky Počítač s programem Logger Pro, sonar Go!Motion, kyvadlo délky 80 cm, stojan, pravítko

Teoretický úvod Libovolná elipsa se středem v počátku souřadnic může být vyjádřena rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ kde } a, b > 0 \text{ a } [x; y] \text{ jsou souřadnice bodů elipsy.}$$

Vzdálenosti a, b se nazývají hlavní poloosa a vedlejší poloosa elipsy.

Abychom mohli v programu Logger Pro vykreslit elipsu, musíme z této rovnice vyjádřit neznámou y . Po úpravě dostaneme $y = \pm b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. Tuto rovnici zadáme do počítače ve dvou částech, jeden výraz s kladným znaménkem (horní část elipsy) a druhý výraz se záporným znaménkem (spodní část elipsy).



- Vypracování**
- 1) Zavěste kyvadlo na pevný stativ a umístěte sonar Go!Motion přibližně do vzdálenosti 50 cm od rovnovážné polohy kyvadla.
 - 2) Zapojte sonar Go!Motion do počítače a spusťte program Logger Pro.
 - 3) Abychom umístili střed elipsy do počátku soustavy souřadnic, vynulujte sonar (**Experiment** → **Nulovat**), když je kyvadlo v rovnovážné poloze.
 - 4) Vychyľte kyvadlo přibližně 15 cm k sonaru a uvolněte ho bez počáteční rychlosti. Spusťte měření nastavené na 5 s.
 - 5) Jestliže jste vše dobře nastavili, získáte na obrazovce dvě sinusoidy. První z nich znázorňuje polohu kyvadla v závislosti na čase, druhá pak jeho rychlost opět v závislosti na čase. Tyto křivky jsou vůči sobě časově posunuté. Jestliže máte pochybnosti o správnosti naměřených dat, poraďte se se svým učitelem.
 - 6) Vytvořte graf závislosti rychlosti na vzdálenosti. Vyberte graf rychlosti na čase a kliknu-

Jen se tak trochu zhoupnout!

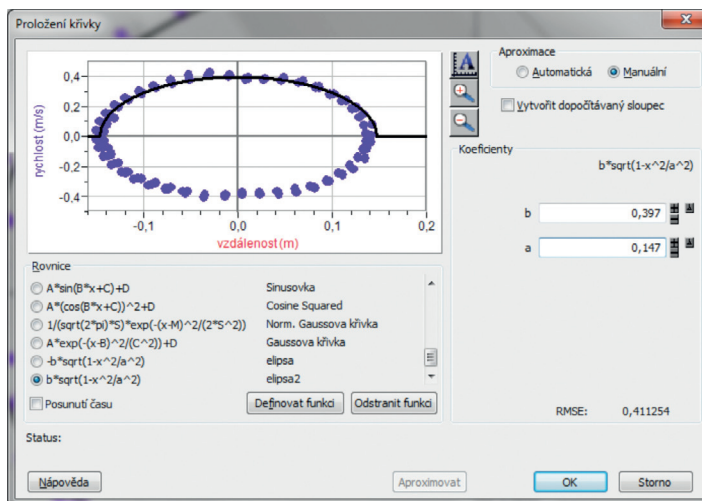
tím na označení osy času vyberte v nabídce **vzdálenost**. Dostanete grafické znázornění elipsy.

- Analýza dat** 1) Zatímco závislost vzdálenosti a rychlosti na čase mají sinusový průběh, grafické znázornění rychlosti na vzdálenosti je eliptické. Abyste určili parametry vzniklé elipsy, musíte nejprve určit průměrné hodnoty průsečíků s osami. Jedním ze způsobů, jak to udělat, je vybrat **Analýza**→**Odečet hodnot** a umístit kurzor do míst průsečíků vzniklé elipsy s osami x a y . Tyto hodnoty zaokrouhlete na tisíce. Zapište zjištěné hodnoty do tabulky.

první průsečík s osou x	druhý průsečík s osou x	a

první průsečík s osou y	druhý průsečík s osou y	b

- 2) Vypočítejte průměr absolutních hodnot těchto průsečíků a zapište ho jako hodnotu hlavní a vedlejší poloosy a, b do tabulky.
- 3) Zadejte předpis funkce vyjadřující horní polovinu elipsy. Vyberte **Analýza**→**Proložit křivku....** Program Logger Pro používá pro odmocninu výraz $\sqrt{\quad}$. Horní polovina elipsy je určena funkčním předpisem $b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, dolní polovina má záporné znaménko před stejným výrazem.



- 4) Jak přesně vytvořené křivky procházejí naměřenými body?
- 5) V jakém bodě pohybu kyvadla je jeho rychlost největší? Ve kterém bodě je rychlost kyvadla naopak nejmenší? Jak tyto polohy souvisí se souřadnicemi průsečíků elipsy a souřadných os x a y ?
- 6) Jak se změní naměřená data, jestliže zvětšíte amplitudu (největší vzdálenost kyvadla od svislé polohy) jeho kmitů? Jak se tato změna promítne do hodnot konstant a a b , jestli vůbec?

Další úkoly Dokažte, jak algebraický výraz $y = \pm b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, který jste v této aktivitě použili, může být odvozen z rovnice elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Jen se tak trochu zhoupnout!

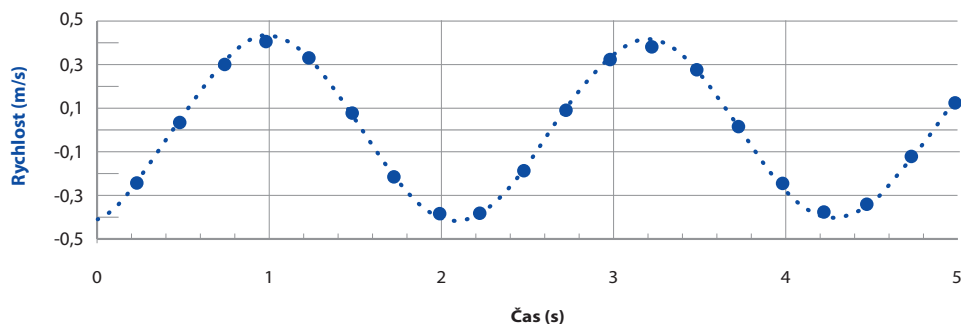
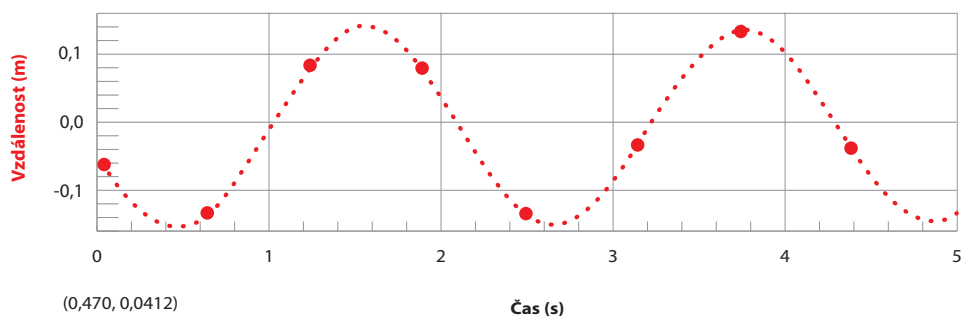
Mirek Kubera

Pokud budete chtít se studenty nejprve prozkoumat grafy vzdálenosti na čase a rychlosti na čase, nezapomeňte jim ukázat, že hodnoty rychlosti jsou kladné, jestliže se závaží vzdaluje od sonaru, a záporné, jestliže se k sonaru přibližuje.

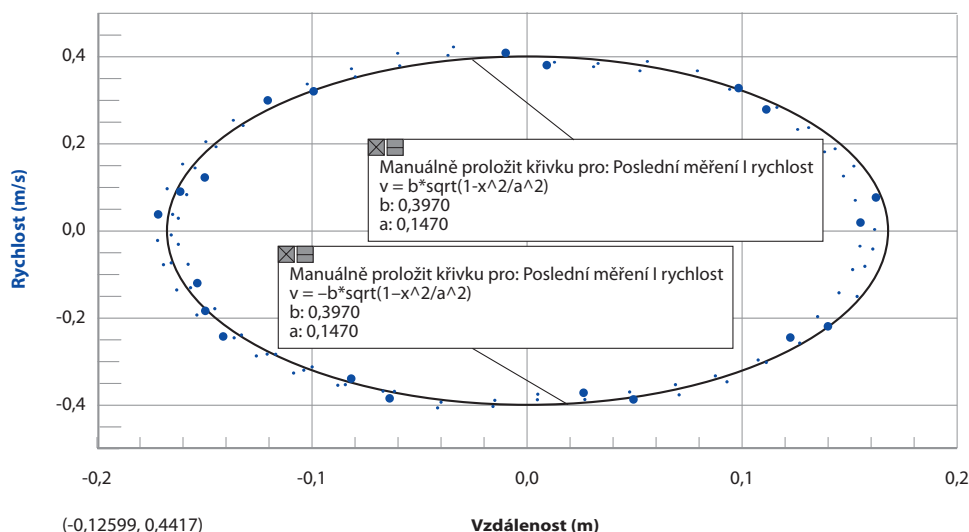
K vytvoření kyvadla nepoužívejte míček z molitanu ani příliš malé či hranaté závaží. Ultrazvukové vlny sloužící k měření vzdálenosti mohou být takovým tělesem pohlceny, nebo odraženy mimo dosah sonaru.

Žáci mají často chybnou představu, že grafy pohybu zaznamenávají cestu pohybujícího se tělesa. Zeptejte se jich, proč nakreslený graf je eliptický, zatímco kyvadlo se nepohybuje po eliptické trajektorii.

Zpracování Ukázky naměřených grafů: **první** a **druhý** graf znázorňuje naměřené hodnoty vzdálenosti a rychlosti na čase. **Třetí** pak výslednou elipsu včetně proložených křivek.



Elipsa



Jen se tak trochu zhoupnout!

V následující tabulce jsou uvedeny hodnoty průsečíků s osami a vypočítány hodnoty parametrů elipsy a a b .

první průsečík s osou x	druhý průsečík s osou x	a
0,142	- 0,151	0,147

první průsečík s osou y	druhý průsečík s osou y	b
0,408	- 0,386	0,397

Odpovědi 4) Jak přesně vytvořené křivky prochází naměřenými body?

na otázky **Odpověď:** Vytvořené křivky procházejí naměřenými body dobře. Kyvadlo v průběhu měření vykoná dvě oscilace, a proto je možné, že se zmenší jeho amplituda a vy budete v grafu vidět dvě velmi málo odlišné elipsy.

5) V jakém bodě pohybu kyvadla je jeho rychlost největší? Ve kterém bodě je rychlost kyvadla naopak nejmenší? Jak jsou tyto polohy spojeny se souřadnicemi průsečíků elipsy a souřadných os x a y ?

Odpověď: Rychlost kyvadla je největší při průchodu rovnovážnou polohou. To vidíme v prvních dvou grafech, kde maximum křivky rychlosti odpovídá nulová hodnota křivky vzdálenosti. Tyto hodnoty odpovídají průsečíkům elipsy s osou y . Rychlost je nulová, jestliže je vzdálenost maximální. Tyto okamžiky odpovídají průsečíkům elipsy s osou x .

6) Jak se změní naměřená data, jestliže zvětšíte amplitudu (největší vzdálenost kyvadla od svislé polohy) jeho kmitů? Jak se tato změna promítne do hodnot konstant a a b , jestli vůbec?

Odpověď: Jestliže zvětšíme amplitudu kmitání kyvadla, hodnoty hlavní a vedlejší poloosy a , b budou větší. Je tomu tak proto, že hlavní poloosa a je rovna amplitudě vzdálenosti (polohy) kyvadla a vedlejší poloosa b je rovna amplitudě rychlosti kyvadla. A při větší výchylce kyvadla obě dvě tyto hodnoty vzrostou.

Jak jsou vysocí?

Mirek Kubera

Výstup RVP: žák diskutuje a kriticky zhodnotí statistické informace a daná statistická sdělení, volí a užívá vhodné statistické metody k analýze a zpracování dat, reprezentuje graficky soubory dat, čte a interpretuje tabulky, diagramy a grafy, rozlišuje rozdíly v zobrazení obdobných souborů vzhledem k jejich odlišným charakteristikám

Klíčová slova: výška, histogram, statistika, statistická data, medián, aritmetický průměr, minimum, maximum

Laboratorní práce

Doba na přípravu:

5 min

Doba na provedení:

45 min

Obtížnost:

nízká

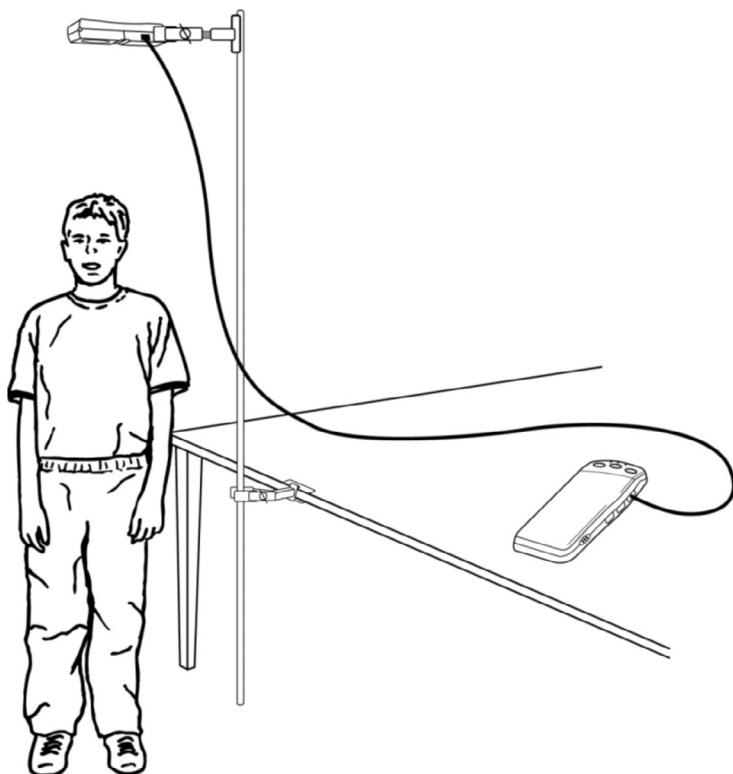
- Úkol**
- 1) Změřte výšku svých spolužáků ve třídě pomocí sonaru.
 - 2) Popište naměřená data pomocí statistických veličin.
 - 3) Znázorněte naměřená data pomocí grafu četností (histogramu).

Pomůcky Počítač s programem Logger Pro, sonar Go!Motion, oboustranná lepící páska, stativový materiál

Teoretický úvod Jak jsou vysocí žáci ve vaší třídě? Je mezi nimi někdo, kdo je opravdu vysoký? Nebo malý?

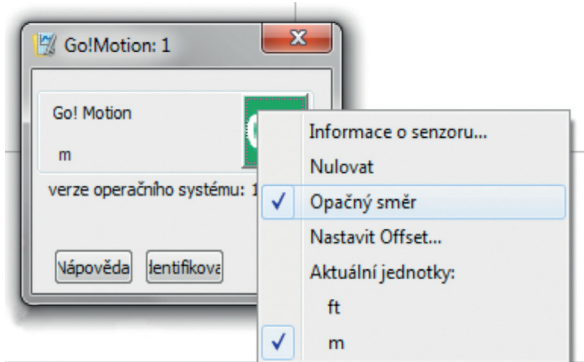
Jaká je průměrná výška žáků ve vaší třídě?

Chceme-li nalézt odpovědi na tyto otázky, můžeme provést jednoduché měření. Při vstupu studentů do třídy každého z nich na chvilinku zastavíme, postavíme pod sonar a změříme jeho výšku. Velice rychle tak nasbíráme data, která se třídou můžeme ihned studovat.



- Postup**
1. Umístěte sonar do výšky přibližně 2,5 m nad podlahu. Můžete ho umístit na stativ, přilepit oboustrannou lepící páskou na strop. Důležité je, aby student mohl přistoupit pod sonar a vy jste mohli snadno změřit jeho výšku. Po sonarem nesmí být žádné překážky. Sonar propojte s počítačem a nastavte měření.
 2. Nejprve je nutné zvolit **Experiment** → **Nastavení** → **Go!Motion**. Objeví se okno, ve kterém kliknete na ikonku **Go** a poté zatrhnete volbu **Opačný směr**; a jestliže je sonar umístěný u stropu, pak ho můžete **Nulovat**.

Jak jsou vysocí?



- Měřit budeme v režimu **Vybrané události**. Není potřeba tyto události nějak pojmenovávat. Jde pouze o počet měření.
- Nastavíme si zobrazované grafy. Do prvního umístíme výšku osoby v závislosti na pořadovém čísle události. Je nutné přejmenovat vzdálenost na výšku a nechat ji zobrazovat na svislou osu tohoto grafu. Ostatní grafy odstraníme.
- Nyní si vytvoříme graf četností výšek v různých intervalech. Zvolíme **Vložit**→**Speciální grafy**→**Histogram**. Zobrazení histogramu je dobré upravit. Pravým tlačítkem myši klikneme na plochu histogramu a zvolíme **Nastavení histogramu...**. Zvolíme nový název grafu, např. Histogram – 1.A. Na kartě **Nastavení četností v intervalech** pak změníme popisek frekvenční osy na **četnost** a popisek Intervalové osy na **výška (m)**. Dále již stačí upravit **Velikost** intervalové osy na 0,02, popřípadě také začátek na 1,5 (dá se předpokládat, že ve třídě nikdo menší než 1,5 m není).
- Zahajte měření stiskem **Sběr dat**. Postavte první měřenou osobu pod sonar, stiskněte **Zachovat** a počítač zapíše do tabulky výšku první osoby. Takto pokračujte, dokud nezměříte výšku všech žáků ve třídě. Ukončete měření tlačítkem **Zastavit**.
- V prvním grafu uvidíte body náhodně rozházené. Ujistěte se, že data neobsahují žádnou hrubou chybu (student s nezvyklou výškou a podobně). Tato data lze z měření vyřadit přes **Úpravy**→**Škrtnout vybraná data**.

- Vypracování**
- Nyní jste získali tabulku výšek všech žáků ve třídě. Jedním ze způsobů, jak zjistit minimum a maximum, je seřadit naměřená data podle rostoucí výšky. Zvolte **Data**→**Seřadit datovou řadu**→**Poslední měření (Latest)**. (Poslední název se shoduje s názvem vaší poslední naměřené datové řady.) Otevře se plovoucí okno a vy můžete vybrat, zda chcete data seřadit vzestupně či sestupně a podle kterého sloupce.
 - V seřazené tabulce můžete snadno nalézt nejmenší hodnotu výšky (minimum), největší hodnotu výšky (maximum) a hodnotu, která je uprostřed tohoto souboru dat (medián). Pokud máte v tabulce sudý počet hodnot, vypočítejte medián jako aritmetický průměr dvou hodnot nejbližších středu. Tyto hodnoty zapíšte do tabulky.

n =	statistika z tabulky	automatická statistika
minimum		
medián		
průměr		
maximum		

- Tyto hodnoty můžete také určit pomocí automatického statistického režimu programu Logger Pro. Označte sloupec, k němuž chcete zjistit statistická data. Zvolte **Analýza**→**Statistika**. V příslušném grafu znázorňujícím výšku studenta v závislosti na pořadovém čísle měřené události se objeví okno se zpracovanými výsledky. V něm můžete odečíst požadované hodnoty a zapsat je do tabulky.

4. Porovnejte údaje v tabulce. Jsou hodnoty nalezené ručně a automaticky shodné? Měly by být shodné?

Graf četnosti (histogram)

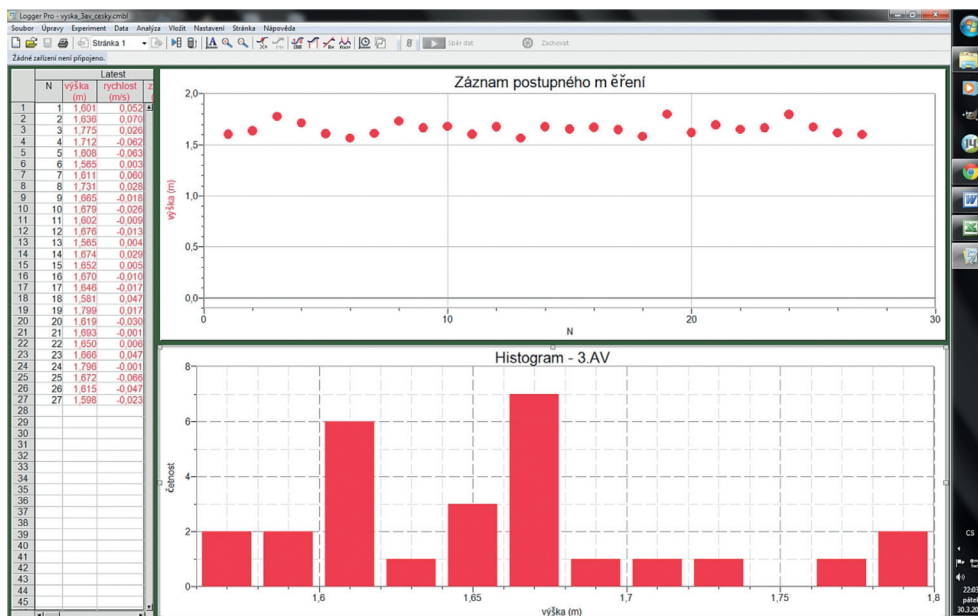
Druhý graf se nazývá histogram. Je to graf vyjadřující počet hodnot v určitém intervalovém rozsahu. V našem případě znázorňuje počet studentů, kteří mají výšku v rozmezí např. 1,60–1,62 m. A tak podobně, vždy po dvou centimetrech výšky (viz nastavení velikosti intervalové osy na 0,02).

1. Z histogramu můžete určit například výšku, kterou má ve vaší třídě nejvíce studentů. Liší se tato výška od průměrné výšky ve třídě?
2. Lze nalézt v histogramu rozsah, kterému odpovídá pouze jeden žák?
3. Jsou výšky vašich kamarádů ve třídě náhodně rozmístěny, nebo jsou soustředěny kolem určité hodnoty? Jsou vaši spolužáci menší než průměr, nebo spíše větší než průměr?
4. Můžete odpovědět na předchozí otázku pouze ze znalosti minima, maxima a průměrné hodnoty?
5. Představte si, že stejné měření provedete ve třídě pátáků. Pokuste se odpovědět na následující otázky:
 - a. Načrtněte, jak by mohl vypadat histogram.
 - b. Změnila se maximální výška?
 - c. Změnila se minimální výška?
 - d. Změnil se aritmetický průměr?
 - e. Proč histogram poskytuje lepší statistické údaje o naměřených výškách než pouhé určení minima, maxima a aritmetického průměru?

Jak jsou vysocí?

Mirek Kubera

Zpracování Pokud se studenti drželi předepsaného postupu, měli by mít na svých počítačích tabulku naměřených hodnot a dva grafy přibližně takové, jako jsou na následujícím obrázku. Tabulka vlevo je seřazena dle pořadového čísla měření.



První graf ukazuje výšky žáků v pořadí, v jakém byli změřeni, a druhý z nich je klasický histogram ukazující počet osob majících výšku v určitém rozmezí. V našem příkladu v rozmezí 2 cm.

1. Nyní seřaďte data podle rostoucí výšky. Dostanete

	N	výška (m)		N	výška (m)
1	1	1,601	1	13	1,565
2	2	1,636	2	6	1,565
3	3	1,775	3	18	1,581
4	4	1,712	4	27	1,598
5	5	1,608	5	1	1,601
6	6	1,565	6	11	1,602
7	7	1,611	7	5	1,608
8	8	1,731	8	7	1,611
9	9	1,665	9	26	1,615
10	10	1,679	10	20	1,619
11	11	1,602	11	2	1,636
12	12	1,676	12	17	1,646
13	13	1,565	13	22	1,650
14	14	1,674	14	15	1,652
15	15	1,652	15	9	1,665
16	16	1,670	16	23	1,666
17	17	1,646	17	16	1,670
18	18	1,581	18	25	1,672
19	19	1,799	19	14	1,674
20	20	1,619	20	12	1,676
21	21	1,693	21	10	1,679
22	22	1,650	22	21	1,693
23	23	1,666	23	4	1,712
24	24	1,796	24	8	1,731
25	25	1,672	25	3	1,775
26	26	1,615	26	24	1,796
27	27	1,598	27	19	1,799
28			28		
29			29		
30			30		

Jak jsou vysocí?

2. Z této seřazené tabulky můžeme odečíst minimum a maximum, nalézt medián a vypočítat aritmetický průměr.

n = 27	statistika z tabulky	automatická statistika
minimum	1,565	1,565
medián	1,652	1,652
průměr	1,658	1,658
maximum	1,799	1,799

3. Analýza naměřených hodnot pomocí automatického režimu programu Logger Pro umožní doplnit hodnoty v třetím sloupci a porovnat je. Jsou naprosto stejné jako hodnoty určené ručně.

Histogram – očekávané odpovědi na otázky

- Výška, kterou má nejvíce žáků ve třídě, je 1,67 m. Odpovídá nejvyššímu sloupci v histogramu. Pro její přesné určení je možné si v nastavení histogramu zvolit velikost intervalové osy 0,01. Průměrná výška je 1,66 m.
- Ano, má-li výška sloupce v histogramu četnost 1, pak to znamená, že danému rozmezí odpovídá pouze jeden žák.
- Někteří jsou větší než průměr, jiní menší než průměr. Dalo by se říci, že jejich výšky jsou rozloženy spíše okolo průměru než daleko od něj.
- Známe-li pouze minimum a maximum, na tuto otázku nemůžeme uspokojivě odpovědět.
- Ve třídě pátáků bude histogram vypadat velmi podobně – bude mít podobné rozložení jako naměřený histogram. Maximální, minimální i průměrná výška budou menší, protože děti tohoto věku budou mít menší výšku postavy.
Histogram poskytuje lepší údaje o statistickém souboru. Na rozdíl od tabulky ihned vidíme, jaká je asi průměrná hodnota, protože aritmetický průměr nebývá příliš vzdálený od hodnoty, která má dle histogramu nejvyšší četnost.



Experimenty s Vernierem

Matematika

Redakce: Mgr. Mirek Kubera, Bc. Petra Směšná,
Mgr. Roman Podlena, Mgr. Vojtěch Beneš

Jazyková korektura: PhDr. Stanislav Zajíček

Fotografie na obálce: Michal Šindelář

Grafická úprava: Mgr. Pavel Brabec

Sazba: RNDr. Ivo Pecl

Tisk: Zephiros, a.s.

Vydalo: Gymnázium Matyáše Lercha Brno, červen 2012

Náklad: 150 ks tiskem, digitálně zdarma na www.gml.cz/projekty/molapp
vydání první



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tato publikace vznikla díky operačnímu programu **Vzdělávání pro konkurenceschopnost** v projektu **Mobilní laboratoř přírodovědných předmětů**, který byl v letech 2011–2012 realizován na Gymnáziu Matyáše Lercha v Brně.