Funkce – exponenciální funce

# Jak předměty chladnou?

Mirek Kubera

**Laboratorní práce**
Doba na přípravu: **5 min**
Doba na provedení: **45 min**
Obtížnost: **střední**

**Výstup RVP:** žák načrtne grafy elementárních funkcí a určí jejich vlastnosti, využívá poznatky o funkcích při řešení rovnic a nerovnic, aplikuje vztahy mezi hodnotami exponenciálních, logaritmických a goniometrických funkcí a vztahy mezi těmito funkcemi, modeluje závislosti reálných dějů pomocí známých funkcí

**Klíčová slova:** exponenciální funkce, ochlazování, počáteční teplota, výsledná teplota

**Úkol**

1) Změřte postupné ochlazování teploměru po jeho vynětí z horké lázně.
2) Naměřená data modelujte a porovnejte s grafem exponenciální funkce.

**Pomůcky** Počítač s programem Logger Pro, teploměr USB Go!Temp, kádinka, teplá voda

**Teoretický úvod**

Když před sebou máte horký nápoj, víte, že se bude postupně ochlazovat. Newtonův zákon o chladnutí nám poskytuje matematický model tohoto přenosu tepla. Tento zákon říká, že teplotní rozdíl mezi teplotou předmětu (teplota $T$) a teplotou jeho okolí (teplota $T_{okolí}$) klesá exponenciálně s časem.

$T - T_{okolí} = T_0 \cdot e^{-kt}$

V tomto vztahu $T_0$ označuje rozdíl počáteční teploty tělesa $T$ a teploty okolí $T_{okolí}$ předmětu na začátku experimentu, $k$ je kladná konstanta a $t$ je čas.

V tomto experimentu změříte teplotu samotného teploměru po jeho vynětí z nádoby s horkou vodou. Naměřená data zkusíte modelovat různými matematickými funkcemi.

**Vypracování**

Zapojte USB teploměr do počítače. Spusťte program Logger Pro. Vezměte kádinku nebo sklenici vody 45–55 °C teplé a vložte do ní čidlo USB teploměru na dobu přibližně 30 s, aby se prohřálo. Nemusíte proměřovat ochlazování vody ve sklenici, to by trvalo příliš dlouho. Postačí, když budete studovat ochlazování samotného teploměru.

Vyndejte teploměr z vody, položte ho na kraj stolu a okamžitě zahajte měření spuštěním **Sběru dat**. Měření bude trvat po dobu 180 s.

Po ukončení měření z grafu odečtěte (**Odečet hodnot**) počáteční a konečnou teplotu teploměru. Konečná teplota by měla odpovídat teplotě prostředí (pokojová teplota) nebo být lehce nad ní. Hodnoty zapište do následující tabulky:

| | |
|---|---|
| počáteční teplota (°C) ... $t_1$ | |
| konečná teplota (°C) ... $t_2$ | |
| rozdíl teplot: počáteční – konečná (°C) ... $T_0 = t_1 - t_2$ | |

Doplňte následující tabulku:

| | | |
|---|---|---|
| manuální proložení | | |
| $T - T_{okolí} = T_0 \cdot e^{-kt}$ | $T_0$ | |
| | k | |
| | $T_{okolí}$ | |
| automatické proložení | | |
| $y = A*\exp(-C*x) + B$ | $A$ | |
| | $C$ | |
| | $B$ | |

Jak předměty chladnou?



**Analýza dat**

1) Mohli bychom naměřená data proložit klesající exponenciální funkcí? Jak? Jinou funkcí než základní ve tvaru $y = A \cdot e^{-bx}$ ?
2) Protože se v Newtonově modelu ochlazování hovoří o rozdílu teploty horkého tělesa a jeho okolí $T - T_{okolí} = T_0 \cdot e^{-kt}$ , můžeme tuto rovnici přepsat na tvar $T = T_0 \cdot e^{-kt} + T_{okolí}$ . Program Logger Pro obsahuje vlastní exponenciální proložení ve tvaru $y = A$*exp$(- C * x) + B$. Porovnejte tento výraz s výrazem $T = T_0 \cdot e^{-kt} + T_{okolí}$ a určete, čemu jsou rovny konstanty A, B a C.
3) Jestliže jste nalezli hodnoty počáteční a konečné (pokojové) teploty, můžete se pokusit proložit naměřená data odpovídající funkcí a nalézt hodnotu koeficientu *k*.
4) Zvolte **Analýza→Proložit křivku…**. Vyberte **Přirozenou exponenciálu** a **Manuální proložení**. Zadejte hodnoty koeficientů A a B. Hodnota B se bude blížit pokojové teplotě v místě experimentu. Zadání koeficientu C zkoušejte postupně tak dlouho, než proložená křivka bude pěkně procházet naměřenými daty.
5) Rovnici proložené funkce napište a poté ji převeďte do původního tvaru (Newtonův zákon).
6) Tuto funkci můžete také zkusit proložit **Automaticky**. Odpovídá naměřeným datům?
7) Jestliže t = 0 s, jaká je hodnota výrazu $e^{-kt}$?
8) Jestliže je *t* velmi velké, jaká je hodnota teplotního rozdílu $T - T_{okolí}$ ? Jaká je teplota měřená teploměrem v takovém okamžiku?
9) Co musíte změnit v realizaci experimentu, jestliže chcete zmenšit hodnotu parametru *k* v dalším měření? Jakou veličinu představuje hodnota *k*?
10) Z rovnice proložené funkce určete čas, za který se teplotní čidlo ochladí na teplotu o 1 °C vyšší, než je pokojová teplota.
11) Jestliže je počáteční rozdíl teplot poloviční proti předchozímu měření, bude také trvat polovinu času ochlazování na teplotu o 1 °C vyšší, než je teplota pokojová?

Funkce – exponenciální funce

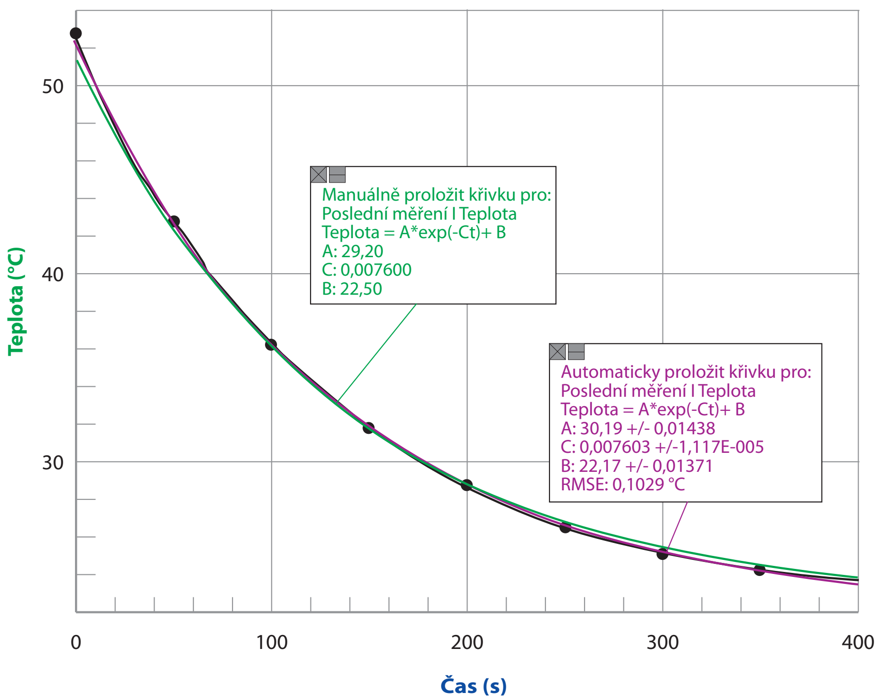
# Jak předměty chladnou?

Mirek Kubera

**Zpracování** Pokud potřebujete úlohu trochu zkrátit, můžete žákům říci, aby teploměr třeli prsty, a tím ho zahřáli. Počáteční teplota sice bude nižší, ale jinak bude vše fungovat naprosto stejně. Počítejte ale s tím, že studenti začnou provádět vylomeniny.

Měření je nutné začít chvilku poté, co se teploměr začne ochlazovat. Můžete ho tedy zahřát na 60 °C a začít měřit teprve tehdy, když bude ukazovat teplotu kolem 50 °C.

**Ukázka naměřených hodnot**




| | |
|---|---|
| počáteční teplota (°C) ... $t_1$ | 52,9 |
| konečná teplota (°C) ... $t_2$ | 23,7 |
| rozdíl teplot: počáteční – konečná (°C) ... $T_0 = t_1 - t_2$ | 29,2 |

| | | |
|---|---|---|
| manuální proložení | | |
| $T - T_{okolí} = T_0 \cdot e^{-kt}$ | $T_0$ | 29,2 |
| | k | 0,0076 |
| | $T_{okolí}$ | 22,50 |
| automatické proložení | | |
| $y = A^*\exp(-C^*x) + B$ | $A$ | 30,19 |
| | $C$ | 0,0076 |
| | $B$ | 22,17 |

**Odpovědi na otázky**

1) Mohli bychom naměřená data proložit klesající exponenciální funkcí? Jak? Jinou funkcí než základní ve tvaru $y = A \cdot e^{-bx}$?

**Odpověď:** Ano, naměřená data lze proložit grafem klesající exponenciální funkce. Tato funkce je ovšem posunuta ve směru osy y, která znázorňuje teplotu. Výsledná teplota se totiž blíží teplotě okolí, a nikoliv nule jako u exponenciální funkce.

2) Protože se v Newtonově modelu ochlazování hovoří o rozdílu teploty horkého tělesa a jeho okolí $T - T_{okolí} = T_0 \cdot e^{-kt}$, můžeme tuto rovnici přepsat na tvar $T = T_0 \cdot e^{-kt} + T_{okolí}$. Program Logger Pro obsahuje vlastní exponenciální proložení ve tvaru $y = A$*exp(– $C$ * $x$) + $B$. Porovnejte tento výraz s výrazem $T = T_0 \cdot e^{-kt} + T_{okolí}$ a určete, čemu jsou rovny konstanty A, B a C.

**Odpověď:** Konstanta A je blízká rozdílu počáteční teploty teploměru a teploty okolí. Tedy v našem případě hodnotě $T_0$. Konstanta B odpovídá teplotě okolí a určuje posunutí naměřených hodnot ve směru osy $y$. Konstanta C charakterizuje rychlost ochlazování teploměru. Její jednotkou je $s^{-1}$.

5) Rovnici proložené funkce napište a poté ji převeďte do původního značení $T = T_0 \cdot e^{-kt} + T_{okolí}$ (Newtonův zákon).

**Odpověď:** Rovnice hledané funkce je $y = 29{,}2 \cdot e^{-0{,}0076 \cdot x} + 22{,}5$, což můžeme přepsat pro teplotu ve tvaru $T = 29{,}2 \cdot e^{-0{,}0076 \cdot t} + 22{,}5$ ($T$ značí teplotu ve °C a $t$ čas v sekundách).

6) Tuto funkci můžete také zkusit proložit Automaticky. Odpovídá naměřeným datům?

**Odpověď:** Ano, automatické proložení velmi dobře odpovídá naměřených datům. Koeficienty prokládaných funkcí jsou prakticky shodné.

7) Jestliže t = 0 s, jaká je hodnota výrazu $e^{-kt}$?

**Odpověď:** Pro $t = 0$ s nabývá výraz $e^{-kt}$ hodnoty 1, neboť $e^0 = 1$.

8) Jestliže je t velmi velké, jaká je hodnota teplotního rozdílu $T - T_{okolí}$? Jaká je teplota měřená teploměrem v takovém okamžiku?

**Odpověď:** Pro velmi velké $t$ je pak výraz $e^{-kt}$ roven 0, tudíž teplotní rozdíl je nulový, $T_0 = T_{okolí}$. Po dostatečně dlouhém čase se teploměr dostane do tepelné rovnováhy se svým okolím.

9) Co musíte změnit v realizaci experimentu, jestliže chcete zmenšit hodnotu $k$ v dalším měření? Jakou veličinu představuje hodnota $k$?

**Odpověď:** Chceme-li změnit hodnotu $k$, která vyjadřuje rychlost ochlazování teploměru, můžeme například s teploměrem mávat a urychlit jeho ochlazování, nebo ho naopak obalit vrstvou izolace (papír, polystyren, vata) a jeho ochlazování zpomalit.

10) Z rovnice proložené funkce určete čas, za který se teplotní čidlo ochladí na teplotu o 1 °C vyšší, než je pokojová teplota.

**Odpověď:** Teplota o 1 °C vyšší než teplota okolí je v našem případě 23,17 °C. Tuto hodnotu musíme dosadit do rovnice exponenciální funkce $y = 30{,}19 \cdot e^{-0{,}0076 \cdot x} + 22{,}17$ za $y$ a hledat $x$ neboli čas. Řešení rovnice $23{,}17 = 30{,}19 \cdot e^{-0{,}0076 \cdot x} + 22{,}17$ je po zaokrouhlení $x = 448$. Teploměr se tedy ochladí na pokojovou teplotu za 448 s.

11) Jestliže je počáteční rozdíl teplot poloviční proti předchozímu měření, bude také trvat polovinu času ochlazování na teplotu o 1 °C vyšší, než je teplota pokojová?

**Odpověď:** Nebude. Teplotní rozdíl mezi počáteční a pokojovou teplotou je sice menší, v grafu exponenciály však můžeme vidět, že změna teploty při ochlazování teploměru je větší v počátku experimentu a značně menší v závěru. Více se ochlazuje těleso, které je hodně horké vůči svému okolí. Nelze tedy očekávat, že se ochladí na pokojovou teplotu za polovinu času.

Můžeme také provést stejný výpočet jako v předchozí otázce. Dosadíme $T_0 = 15{,}1$ °C a vyjde nám $t = 357$ s.