

Jen se tak trochu zhoupnout!

Mirek Kubera

Výstup RVP: žák využívá charakteristické vlastnosti kuželoseček k určení analytického vyjádření, z analytického vyjádření (z obecné nebo vrcholové rovnice) určí základní údaje kuželosečky

Klíčová slova: elipsa, průsečíky s osami, hlavní poloosa, vedlejší poloosa, rovnice elipsy

Laboratorní práce
Doba na přípravu:
5 min
Doba na provedení:
45 min
Obtížnost:
nízká

- Úkol**
- 1) Změřte závislost polohy a rychlosti na čase pro pohybující se kyvadlo.
 - 2) Vytvořte graf závislosti rychlosti na poloze kyvadla a určete rovnici elipsy, kterou jste takto vytvořili.

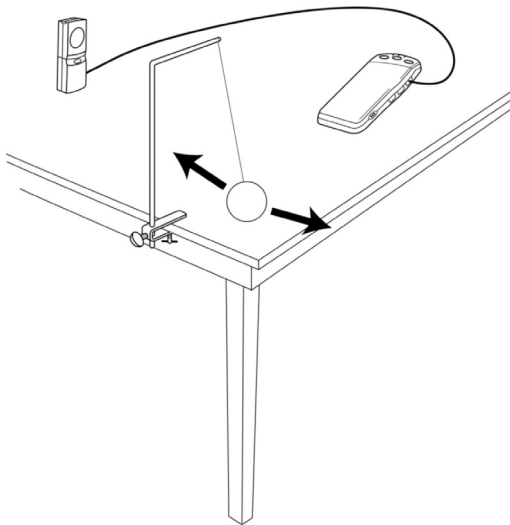
Pomůcky Počítač s programem Logger Pro, sonar Go!Motion, kyvadlo délky 80 cm, stojan, pravítko

Teoretický úvod Libovolná elipsa se středem v počátku souřadnic může být vyjádřena rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ kde } a, b > 0 \text{ a } [x; y] \text{ jsou souřadnice bodů elipsy.}$$

Vzdálenosti a, b se nazývají hlavní poloosa a vedlejší poloosa elipsy.

Abychom mohli v programu Logger Pro vykreslit elipsu, musíme z této rovnice vyjádřit neznámou y . Po úpravě dostaneme $y = \pm b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. Tuto rovnici zadáme do počítače ve dvou částech, jeden výraz s kladným znaménkem (horní část elipsy) a druhý výraz se záporným znaménkem (spodní část elipsy).



- Vypracování**
- 1) Zavěste kyvadlo na pevný stativ a umístěte sonar Go!Motion přibližně do vzdálenosti 50 cm od rovnovážné polohy kyvadla.
 - 2) Zapojte sonar Go!Motion do počítače a spusťte program Logger Pro.
 - 3) Abychom umístili střed elipsy do počátku soustavy souřadnic, vynulujte sonar (**Experiment** → **Nulovat**), když je kyvadlo v rovnovážné poloze.
 - 4) Vychyľte kyvadlo přibližně 15 cm k sonaru a uvolněte ho bez počáteční rychlosti. Spusťte měření nastavené na 5 s.
 - 5) Jestliže jste vše dobře nastavili, získáte na obrazovce dvě sinusoidy. První z nich znázorňuje polohu kyvadla v závislosti na čase, druhá pak jeho rychlost opět v závislosti na čase. Tyto křivky jsou vůči sobě časově posunuté. Jestliže máte pochybnosti o správnosti naměřených dat, poraďte se se svým učitelem.
 - 6) Vytvořte graf závislosti rychlosti na vzdálenosti. Vyberte graf rychlosti na čase a kliknu-

Jen se tak trochu zhoupnout!

tím na označení osy času vyberte v nabídce **vzdálenost**. Dostanete grafické znázornění elipsy.

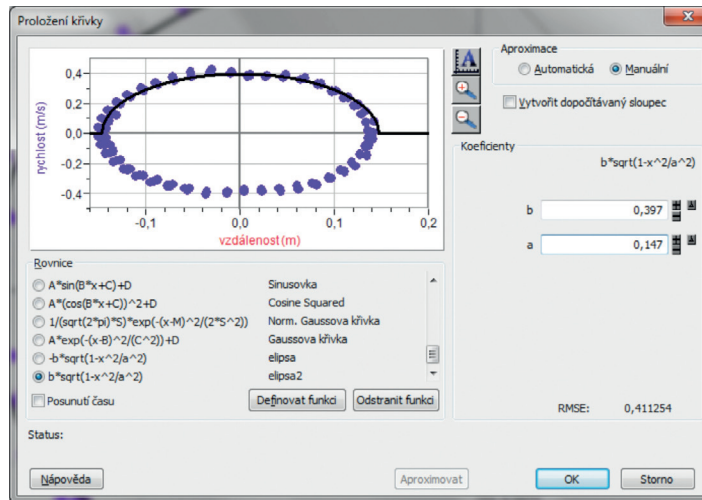
Analýza dat

- Zatímco závislost vzdálenosti a rychlosti na čase mají sinusový průběh, grafické znázornění rychlosti na vzdálenosti je eliptické. Abyste určili parametry vzniklé elipsy, musíte nejprve určit průměrné hodnoty průsečíků s osami. Jedním ze způsobů, jak to udělat, je vybrat **Analýza** → **Odečet hodnot** a umístit kurzor do míst průsečíků vzniklé elipsy s osami x a y . Tyto hodnoty zaokrouhlete na tisíciny. Zapište zjištěné hodnoty do tabulky.

první průsečík s osou x	druhý průsečík s osou x	a

první průsečík s osou y	druhý průsečík s osou y	b

- Vypočítejte průměr absolutních hodnot těchto průsečíků a zapište ho jako hodnotu hlavní a vedlejší poloosy a , b do tabulky.
- Zadejte předpis funkce vyjadřující horní polovinu elipsy. Vyberte **Analýza** → **Proložit křivku...** Program Logger Pro používá pro odmocninu výraz $\sqrt{\quad}$ ($\sqrt{\quad}$). Horní polovina elipsy je určena funkčním předpisem $b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, dolní polovina má záporné znaménko před stejným výrazem.



- Jak přesně vytvořené křivky procházejí naměřenými body?
- V jakém bodě pohybu kyvadla je jeho rychlost největší? Ve kterém bodě je rychlost kyvadla naopak nejmenší? Jak tyto polohy souvisí se souřadnicemi průsečíků elipsy a souřadných os x a y ?
- Jak se změní naměřená data, jestliže zvětšíte amplitudu (největší vzdálenost kyvadla od svislé polohy) jeho kmitů? Jak se tato změna promítne do hodnot konstant a a b , jestli vůbec?

Další úkoly Dokažte, jak algebraický výraz $y = \pm b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, který jste v této aktivitě použili, může být odvozen z rovnice elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Jen se tak trochu zhoupnout!

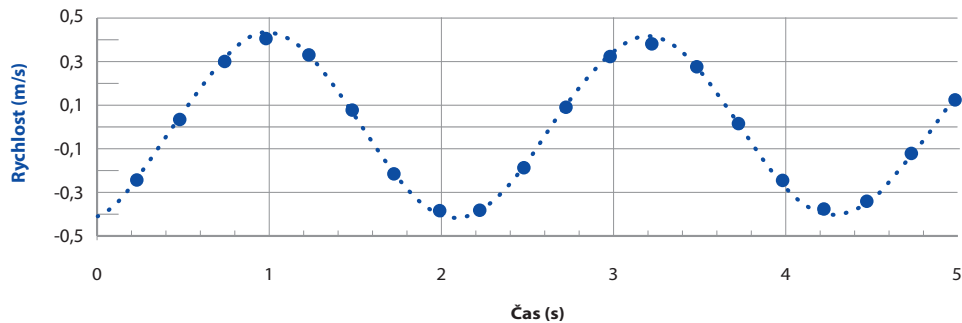
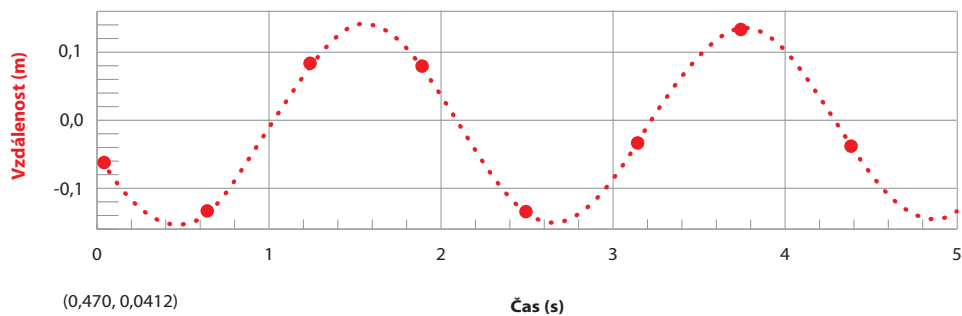
Mirek Kubera

Pokud budete chtít se studenty nejprve prozkoumat grafy vzdálenosti na čase a rychlosti na čase, nezapomeňte jim ukázat, že hodnoty rychlosti jsou kladné, jestliže se závaží vzdaluje od sonaru, a záporné, jestliže se k sonaru přibližuje.

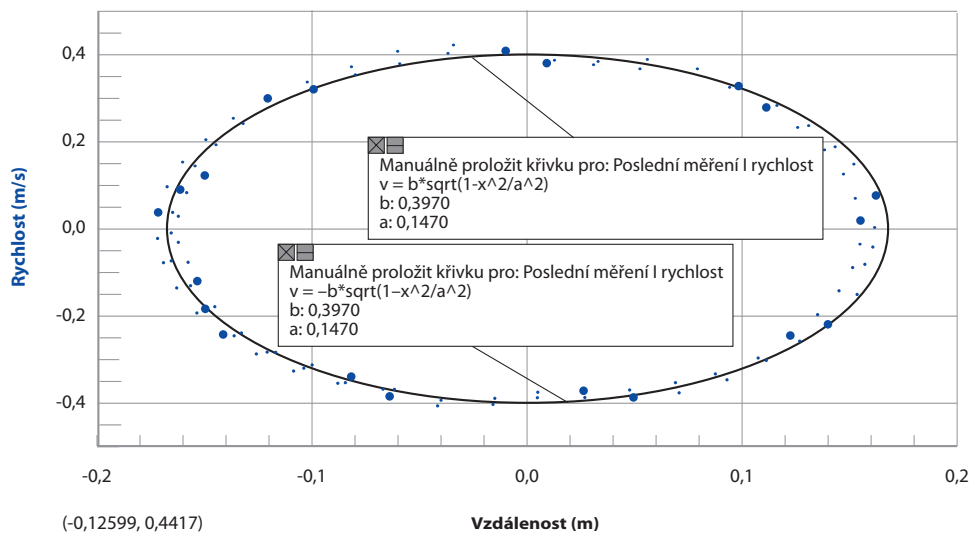
K vytvoření kyvadla nepoužívejte míček z molitanu ani příliš malé či hranaté závaží. Ultrazvukové vlny sloužící k měření vzdálenosti mohou být takovým tělesem pohlceny, nebo odraženy mimo dosah sonaru.

Žáci mají často chybnou představu, že grafy pohybu zaznamenávají cestu pohybujícího se tělesa. Zeptejte se jich, proč nakreslený graf je eliptický, zatímco kyvadlo se nepohybuje po eliptické trajektorii.

Zpracování Ukázky naměřených grafů: **první** a **druhý** graf znázorňuje naměřené hodnoty vzdálenosti a rychlosti na čase. **Třetí** pak výslednou elipsu včetně proložených křivek.



Elipsa



Jen se tak trochu zhoupnout!

V následující tabulce jsou uvedeny hodnoty průsečíků s osami a vypočítány hodnoty parametrů elipsy a a b .

první průsečík s osou x	druhý průsečík s osou x	a
0,142	- 0,151	0,147

první průsečík s osou y	druhý průsečík s osou y	b
0,408	- 0,386	0,397

Odpovědi 4) Jak přesně vytvořené křivky prochází naměřenými body?

na otázky **Odpověď:** Vytvořené křivky procházejí naměřenými body dobře. Kyvadlo v průběhu měření vykoná dvě oscilace, a proto je možné, že se zmenší jeho amplituda a vy budete v grafu vidět dvě velmi málo odlišné elipsy.

5) V jakém bodě pohybu kyvadla je jeho rychlost největší? Ve kterém bodě je rychlost kyvadla naopak nejmenší? Jak jsou tyto polohy spojeny se souřadnicemi průsečíků elipsy a souřadných os x a y ?

Odpověď: Rychlost kyvadla je největší při průchodu rovnovážnou polohou. To vidíme v prvních dvou grafech, kde maximum křivky rychlosti odpovídá nulové hodnotě křivky vzdálenosti. Tyto hodnoty odpovídají průsečíkům elipsy s osou y . Rychlost je nulová, jestliže je vzdálenost maximální. Tyto okamžiky odpovídají průsečíkům elipsy s osou x .

6) Jak se změní naměřená data, jestliže zvětšíte amplitudu (největší vzdálenost kyvadla od svislé polohy) jeho kmitů? Jak se tato změna promítne do hodnot konstant a a b , jestli vůbec?

Odpověď: Jestliže zvětšíme amplitudu kmitání kyvadla, hodnoty hlavní a vedlejší poloosy a , b budou větší. Je tomu tak proto, že hlavní poloosa a je rovna amplitudě vzdálenosti (polohy) kyvadla a vedlejší poloosa b je rovna amplitudě rychlosti kyvadla. A při větší výchylce kyvadla obě dvě tyto hodnoty vzrostou.