Pojďme se setkat!

Petra Směšná

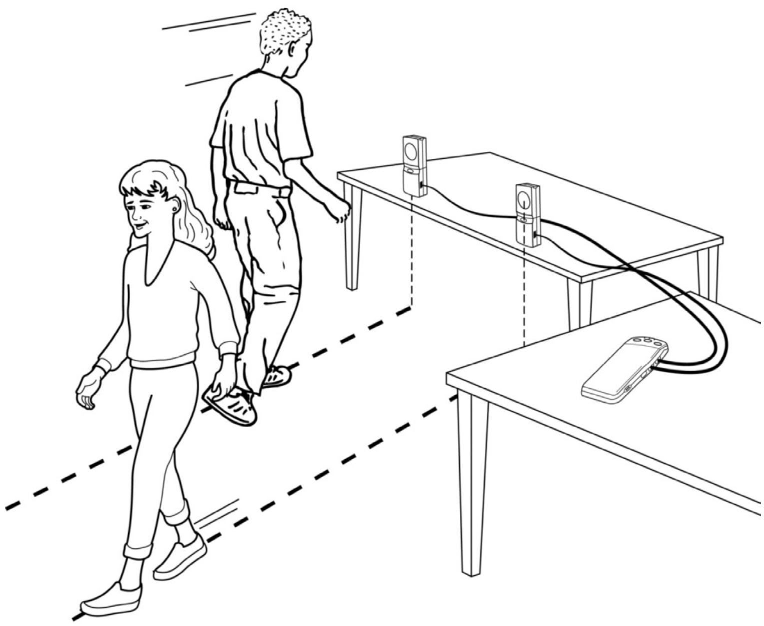
Laboratorní práce
Doba na přípravu: **5 min**
Doba na provedení: **90 min**
Obtížnost: **střední**

Výstup RVP: žák měří dané veličiny, analyzuje a zpracovává naměřená data, rozumí pojmu řešení soustavy dvou lineárních rovnic, chápe souvislost rovnoměrného pohybu a lineárních funkcí

Klíčová slova: soustavy lineárních rovnic, průsečík dvou přímek, grafické řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

Úkol
a) Změřte závislost dráhy a rychlosti na čase pro dva chodce.
b) Najděte rovnice přímek, které popisují pohyb dvou chodců, a najděte jejich průsečík.
c) Vyřešte soustavu dvou lineárních rovnic popisující pohyb obou chodců.

Pomůcky Počítač, program Logger Pro, dva detektory pohybu (sonar), metr, stopky



Teoretický úvod V běžném životě se můžeme setkávat s problémy, kde se vyskytuje více proměnných a k jejichž řešení je třeba soustavy dvou či více matematických rovnic. Dále se budeme zabývat nejjednodušším typem těchto soustav – soustavami dvou lineárních rovnic o dvou neznámých.

Řešením soustavy je uspořádaná dvojice čísel. Když dosadíme za neznámé, dostaneme u obou rovnic platné rovnosti. Pokud znázorníme tuto soustavu rovnic graficky, dostaneme graf dvou přímek. Řešení potom odpovídá souřadnicím průsečíku těchto přímek (pokud takovýto průsečík existuje).

Pokud se člověk pohybuje rovnoměrným pohybem v jednom směru, pak jeho vzdálenost v závislosti na čase určuje lineární funkce $y = kx + q$, kde y značí vzdálenost, x je čas, q je počáteční vzdálenost (v čase x = 0) a k odpovídá rychlosti pohybu. Budeme-li mít dvě pohybující se osoby, dostáváme dvě lineární rovnice o dvou neznámých, kterým odpovídají grafy dvou přímek.

V této úloze budeme modelovat takový případ, kdy jdou dvě osoby proti sobě a potkají se. Matematicky tuto situaci znázorníme graficky i pomocí soustavy dvou lineárních rovnic.

Vypracování
1) Postavte detektory pohybu na stůl tak, aby mířily rovnoběžně do otevřeného prostoru, a připojte je k počítači. Detektory by měly být od sebe vzdáleny alespoň 1,5 m.
2) Nastavte dobu měření na 8 s (**Experiment→Sběr dat**).
3) Budete potřebovat celkem 4 lidi. Dva budou chodit před detektory, třetí bude stopovat čas na stopkách a čtvrtý člověk označí místo, kde se dva chodci budou míjet.

Samotné měření bude probíhat tímto způsobem: chodci si stoupnou před detektory – jeden ve vzdálenosti 0,5 m před prvním detektorem, druhý ve vzdálenosti 3 m od druhého detektoru. Až zahájíme měření, první člověk se rozejde směrem od detektoru a druhý člověk směrem k detektoru. Jakmile započne měření, spustí třetí člověk stopky. Zastaví je ve chvíli, kdy dva chodci budou procházet kolem sebe (= potkají se). V té chvíli čtvrtý člověk označí například samolepkou místo, kde se potkali. Chodci pokračují dál. První se zastaví 3 m od detektoru, druhý 0,5 m před detektorem (tyto hodnoty berte jako přibližné).

Je vhodné si toto měření několikrát vyzkoušet. Důležité je, aby v naměřeném grafu nebyly skokové změny nebo prázdná místa.

4) Spusťte měření a postupujte podle předchozího kroku.
5) Prozkoumejte graf závislosti vzdálenosti na čase. Pro prvního chodce by měl být lineárně rostoucí, pro druhého chodce lineárně klesající.
6) Po úspěšném měření nechte čtvrtého člověka, ať změří vzdálenost místa, kde se chodci potkali, od spojnice detektorů. Tuto vzdálenost, stejně jako čas na stopkách, zapište do tabulky.

Analýza dat

1) Jak poznáte z grafu, která křivka odpovídá kterému chodci? Označte si je.
2) Klikněte na graf, aby se stal aktivním, a stiskněte tlačítko **Odečet hodnot**.
3) Zaznamenejte do tabulky souřadnice bodu, kde se obě křivky protínají (jako místo a čas potkání).

	stopky, metr	graf	rovnice
čas potkání			
místo potkání			

	x_1	y_1	x_2	y_2	směrnice	průsečík s osou y
první chodec						
druhý chodec						

4) Budeme chtít zjistit rovnice přímek, které odpovídají grafu pohybu jednotlivých chodců. K tomu budeme potřebovat souřadnice dvou bodů křivky grafu od každého chodce. Při tomto odečítání ignorujte jakékoliv horizontální části na začátku, nebo na konci měření. Je vhodné zvolit vzdálené body.

Zaznamenejte tyto body do tabulky.

5) Pomocí těchto bodů spočítejte směrnice k daných přímek. Použijte vztah

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Co v našem případě znázorňuje směrnice (jaké má jednotky)?

6) Pomocí rovnice $y = kx + q$ spočítejte průsečík s osou y (neboli číslo q). Spočítejte tento průsečík pro oba chodce.
7) Zapište si rovnice přímek, které odpovídají grafu, pro oba chodce.
8) Proložte naměřená data grafy přímek, jejichž rovnice jste spočítali.
   a) Nejprve pro prvního chodce; klikněte na **Analýza→Proložit křivku**, označte **Poslední měření|vzdálenost 1** a stiskněte OK.
   b) Vyberte Manuální aproximaci a v panelu rovnic zaškrtněte (lineární). Je to analogie k běžnému výrazu $y = kx + q$.
   c) Do parametrů zapište směrnici a průsečík s osou y, které jste spočítali, pro prvního chodce. Po kliknutí na OK se vrátíte do grafu.
   d) Nyní opakujte postup i pro druhého chodce.
9) Nakolik odpovídají proložené přímky naměřeným hodnotám?
10) Nyní můžete zjistit průsečík těchto dvou přímek i početně. Zapište si rovnice obou přímek pod sebe. Dostáváte tím soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Řešením soustavy jsou hodnoty x a y, které odpovídají oběma rovnicím. V našem případě

jsou to hodnoty času a vzdálenosti, které měli naši chodci společné (místo a čas, kdy se chodci potkali). Vyřešte tuto soustavu dvou lineárních rovnic a její řešení zapište do tabulky.

11) Porovnejte zjištěné časy a vzdálenosti, které jste změřili, odečetli z grafu a dostali jako řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých. Liší se tyto hodnoty?
12) Pokud řešíme soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, může řešení dopadnout trojím způsobem:
    a) soustava má jedno řešení,
    b) soustava má nekonečně mnoho řešení,
    c) soustava nemá žádné řešení.

    Jak bude vypadat graf dvou lineárních funkcí, aby jejich soustava měla jedno, nekonečně mnoho, žádné řešení? Jakým způsobem by bylo třeba upravit pohyb chodců, abyste takovéto grafy dostali? Vyzkoušejte.

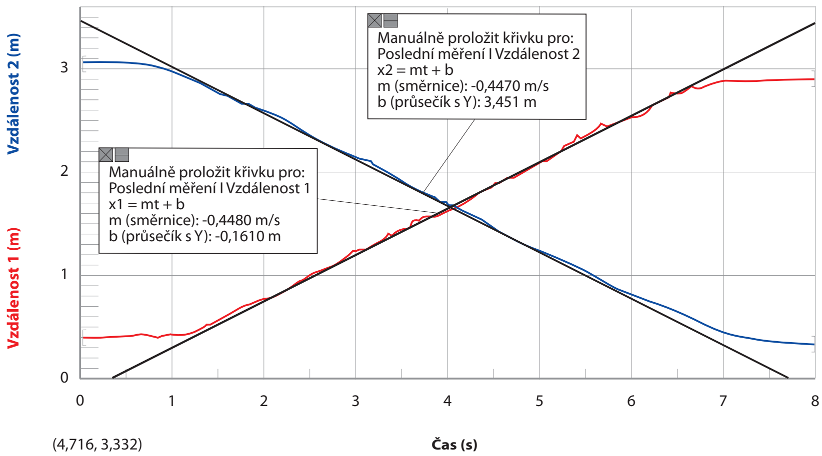
Pojďme se setkat!

Petra Směšná

Zpracování

	stopky, metr	graf	rovnice
čas potkání	3,47 s	4,09 s	4,036 s
místo potkání	1,7 m	1,65 m	1,647 m

	x_1	y_1	x_2	y_2	směrnice	průsečík s osou y
první chodec	2,21 s	0,83 m	5,18 s	2,16 m	0,448 m/s	-0,161 m
druhý chodec	1,815 s	2,639 m	4,62 s	1,386 m	-0,447 m/s	3,451 m



Odpovědi na otázky

5) Co v našem případě znázorňuje směrnice (jaké má jednotky)?
Odpověď: Směrnice znázorňuje rychlost chodce a má jednotku m/s.

7) Zapište si rovnice přímek, které odpovídají grafu, pro oba chodce.
Odpověď: první chodec $y = 0{,}448 \cdot x - 0{,}161$, druhý chodec $y = -\,0{,}447 \cdot x + 3{,}451$.

9) Nakolik odpovídají proložené přímky naměřeným hodnotám?
Odpověď: Proložené přímky dobře kopírují naměřená data, jsou tedy dobrým modelem studované závislosti. Drobné odchylky jsou způsobeny nerovnoměrností chůze.

11) Porovnejte zjištěné časy a vzdálenosti, které jste změřili, odečetli z grafu a dostali jako řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých. Liší se tyto hodnoty?
Odpověď: Až na přímé měření se tyto hodnoty příliš neliší. Přímé měření času je zatíženo reakční dobou pozorovatele, která může dosáhnout až 0,4 s.

12) Jak bude vypadat graf dvou lineárních funkcí, aby jejich soustava měla jedno, nekonečně mnoho, žádné řešení? Jakým způsobem by bylo třeba upravit vaše měření, abyste takovéto grafy dostali? Vyzkoušejte.
Odpověď: Naše úloha modeluje soustavu s jedním řešením (přímky jsou různoběžné). Je to vidět již z koeficientů proložených funkcí. Mají opačné znaménko, což znamená, že jde o různoběžné přímky. Má-li mít soustava nekonečně mnoho řešení, musí jít o totožné přímky a chodci se musí pohybovat stejnou rychlostí, ve stejném směru a ze stejné počáteční polohy. Abychom nezískali žádné řešení soustavy, musí se chodci pohybovat stejným směrem a stejnou rychlostí, ale z různých počátečních poloh.